

画像や音で理解する数学・物理の世界

数式の歌を聴け

第7回 対数グラフから見える現象

宮田 賢一

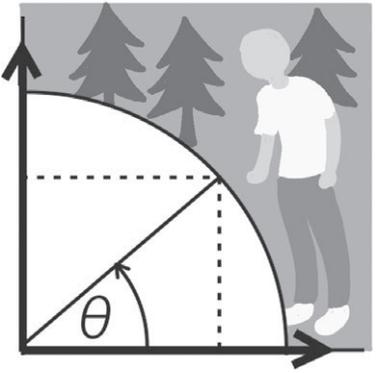


表1
現実で使用する指数と物理値の範囲

指数	主な値の範囲	物理値の範囲	計算式
水素イオン指数pH	0～14	水素イオンの活量 a_{H^+} [mol/L] $10^0 \sim 10^{-14}$	$\text{pH} = -\log_{10} a_{\text{H}^+}$
地震のマグニチュード M	0～9	地震のエネルギー E [J] $0.3 \times 10^4 \sim 2.0 \times 10^{18}$	$M = \frac{\log_{10} E - 4.8}{1.5}$
星の等級 m	32～-26	放射流速密度比 $F_{\lambda}/F_{\lambda 0}$ $1.6 \times 10^{-13} \sim 2.5 \times 10^{10}$	$m = -2.5 \log_{10} \frac{F_{\lambda}}{F_{\lambda 0}}$

高校の数学で学習する代表的な関数として、対数関数、指数関数、三角関数があります。今回はこの中の対数関数に焦点を当てて、その利用例を見ていきます。

対数って何の役に立つの？

対数は、ある物理現象に対する観測値の範囲が非常に広い場合に、人間の感覚的に分かりやすい値の範囲に圧縮する効果があります。

その一例を表1に示します。液体の酸性・アルカリ性の程度を表す水素イオン指数 (pH)、地震の大きさを表すマグニチュード、星の明るさを表す等級など、どれも物理的な値の範囲は10桁以上の幅を持つものですが、対数を用いることによって値の範囲を1桁以内に抑え、指標として理解しやすくなっています。

まず対数の基本をおさえる

● 対数の定義

対数の定義は以下です。

a の b 乗が c となる時 ($c = ab$) の b を、 a を底とする c の対数と呼ぶ

この関係を、数学記号を用いて $b = \log_a c$ と表記します。また、 $\log_a c$ に対する c を真数と言います。特殊な底の対数には名前が付けられており、底が10のものを常用対数、ネイピア数 e のものを自然対数と呼びます。

● 性質…大きくなり方や小さくなり方を抑えらる

次に対数の重要な性質を2つ挙げます。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \dots\dots\dots (1)$$

$$\log_a x^p = p \log_a x \dots\dots\dots (2)$$

式(1)は対数を使うことで積を和に変換でき、式(2)はべき乗を積に変換できるということを意味しています。乗算やべき乗は、1より大きな数同士の計算はさらに大きくなり、1より小さな数同士の計算はさらに小さくなるという傾向がありますが、これらを和や積に変換することで、大きくなり方や小さくなり方を抑えられることを示しています。

数学としての対数

非常に大きな数値や非常に小さな数値を扱う場合、それが何桁の数字なのかという程度が分かれば十分な場合があります。例えば 5700^{6123} は何桁の数になるか？という問題を考えてみましょう。

実際のプログラムにおいてはPythonやNumPyに組み込みの対数関数を用いれば即座に求められるのですが、まずは原理を説明するために対数表を用いた手法を紹介します。

● 対数表を使って桁数を求める

最初に準備として1.0～9.9までの範囲の100個の数値に対する対数値の表(対数表)を作成します。リスト1に対数表を作成するプログラムを示します。このプログラムではlogの計算にNumPyを使用し、表形式のデータを扱うためにPandasを使用します。

プログラムは本誌サポートページから入手できます。
<https://interface.cqpub.co.jp/2307py/>

