

知っ得!

ご購入はこちら

軽量sin/cos計算アルゴリズム

第2回 その1：軽量でそこそこ精度もあるミニマックス多項式近似 三上 直樹

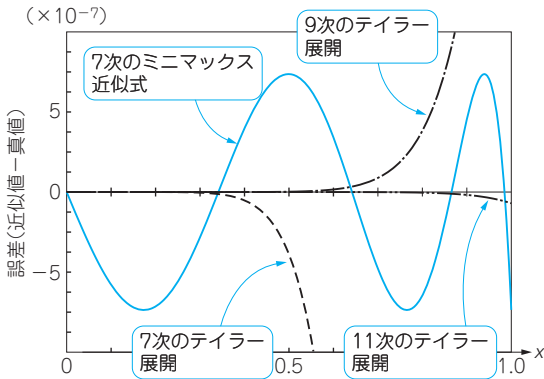


図1 ミニマックス近似式は定番テイラー展開から求めた近似式と比べて計算量のわりに最大誤差をほどほどに抑えられる $\sin(\pi x/2)$ の計算の場合

近似式

近似式を使って数学関数の値を求める場合、その近似式のタイプにはいろいろあります。ここではプログラムが簡単に書け、近似式も比較的簡単に求められるという理由で多項式を使うことにします。

その際に使う多項式ですが、代表的なものに、テイラー展開から求めた近似式とミニマックス近似があります。テイラー展開を使うと簡単に求めることができます。しかし、ミニマックス近似式を求めるのは、簡単ではありません。

● 多項式近似の定番…テイラー展開

$\sin((\pi/2)x)$ を、 $x=0$ を中心にテイラー展開したものは特にマクローリン展開と呼ばれますが、ここではテイラー展開という用語を使います。 $\sin((\pi/2)x)$ を、 $x=0$ を中心にテイラー展開すると次のようになります。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}x\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}x\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2}x\right)^7 + \dots \quad (1)$$

● テイラー展開より軽量のミニマックス近似

ミニマックス近似とは、誤差の絶対値の最大値が最小になるように近似することです。そのような近似式を求めるのは難しいのですが、幸いなことに、近似式の係数をまとめた本が出版されており、ここではその本⁽²⁾から引用したものの中で、7次式で表されるものを使います。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cong a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.570791011 \\ a_3 &= -0.6458928493 \\ a_5 &= 0.0794343442 \\ a_7 &= -0.004333095 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

この近似式を使い、十分高い精度で計算した場合の、絶対誤差^{注1}の絶対値の最大値は 5.819×10^{-7} になります。

● 誤差の比較…ミニマックス近似は誤差が小さい

最初にテイラー展開による近似式とミニマックス近似式の誤差について比較します。数学関数は、 \sin 関数とします。

C言語のライブラリで使える関数 $\sin(x)$ は、 $\sin x$ の値を計算します。このとき x の単位はラジアン (rad) になります。しかし、後から固定小数点演算で \sin 関数の値を求める場合のことを考えると、 $\sin((\pi/2)x)$ を計算するようにした方が都合がよいので、比較する際は、 $\sin((\pi/2)x)$ の値を $0 \leq x \leq 1$ の範囲で求めて、誤差を比較します。

図1には、式(2)で計算した場合の誤差と、式(1)で、7次、9次、11次の項まで使って計算した場合の

注1：誤差としては、絶対誤差と相対誤差がある。それぞれ次のようになる。
絶対誤差：(計算値) - (真の値)。
相対誤差：|(計算値) - (真の値)| / (真の値)。
これ以降「誤差」は絶対誤差の意味で使う。