短期集中

知っ得！軽量sin/cos計算アルゴリズム

ご購入はこちら

得計算テク

マイコンでも使えて便利！

最終回

第4回 その2：高速に正弦波が生成できる再帰的計算法

三上 直樹

再帰的な計算法

再帰的な方法とは，ある変数に対する関数値が分かっている場合に，この分かっている関数値を使って，別な変数に対する関数値を計算する方法です．数学的な用語を使えば，漸化（ぜんか）式を使う方法のことです．

正弦波発生器を作るためにsin/cosの値を使いたい場合には，一定の間隔Tでsin/cosの値を計算していくので，再帰的な方法は近似式を使うよりも短い計算時間になる可能性があります．

特に，ここで紹介する三角関数の加法定理を使う方法と，ディジタル・フィルタを使う方法は，近似多項式を使うよりも短時間で計算できます．

なお，間隔Tでsin，cosの値を計算するということは，アナログ信号としてのsin波，cos波を時間間隔Tで標本化（サンプリング）するのと同じことなので，以降ではTを標本化間隔と呼びます．

● 三角関数の加法定理を使う方法

▶基本的な方法

標本化間隔Tで，周波数F_0のsinの値を計算するということは，$n = 0,\ 1, \cdots$のようにnを1つずつ増加させながら$\sin(2\pi F_0 Tn)$の値を計算するのと同じことです．

ところで，$\sin(2\pi F_0 Tn)$，$\cos(2\pi F_0 Tn)$が分かっていれば，$n+1$に対する値は，三角関数の加法定理[注1]を使って次のように計算できます．

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi F_0 T(n+1)\right) = \sin(2\pi F_0 Tn)\cos(2\pi F_0 T) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \cos(2\pi F_0 Tn)\sin(2\pi F_0 T) \\ \cos\left(2\pi F_0 T(n+1)\right) = -\sin(2\pi F_0 Tn)\sin(2\pi F_0 T) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \cos(2\pi F_0 Tn)\cos(2\pi F_0 T)\end{cases} \quad \cdots\cdots (1)$$

この式で，

$$\begin{cases}A = \cos(2\pi F_0 T) \\ B = \sin(2\pi F_0 T)\end{cases} \quad \cdots\cdots (2)$$

とおくと，式(1)は次のように書けます．

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi F_0 T(n+1)\right) = A\sin(2\pi F_0 Tn) + B\cos(2\pi F_0 Tn) \\ \cos\left(2\pi F_0 T(n+1)\right) = -B\sin(2\pi F_0 Tn) + A\cos(2\pi F_0 Tn)\end{cases} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，$y_n = \sin(2\pi F_0 Tn)$とおくと，$y_{n+1} = \sin(2\pi F_0 T(n+1))$と書けます．同じように$x_n = \cos(2\pi F_0 Tn)$とおくと，$x_{n+1} = \cos(2\pi F_0 T(n+1))$と書けるので，式(3)は次のように書くこともできます．

$$\begin{cases}y_{n+1} = Ay_n + Bx_n \\ x_{n+1} = -By_n + Ax_n\end{cases} \quad \cdots\cdots (4)$$

そこで，最初に，初期値を$y_0 = \sin(2\pi F_0 T \times 0) = 0$，$x_0 = \cos(2\pi F_0 T \times 0) = 1$とします．次に，式(4)を使って$n = 0, 1, 2, \cdots$に対応する$y_{n+1}$，$x_{n+1}$の値を次々と計算していけば，標本化間隔$T$で，周波数$F_0$のsin/cosの値は，少ない回数の加算，乗算で求められます．

なお，この方法は，ディジタル・フィルタを使う方法の一種と考えられます．ブロック図で示せば**図1**の

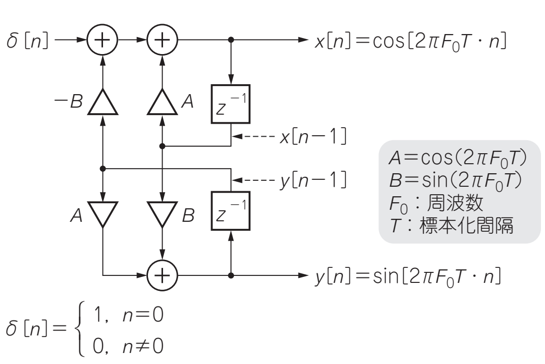

図1 三角関数の加法定理を使うsin，cos同時発生器の基本的な構成（振幅の補正の部分は除く）

注1：三角関数（sin，cos）の加法定理は以下のように示される

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{cases}$$

第1回　連載で紹介する関数計算法のメリット（2017年7月号）
第2回　その1：軽量でそこそこ精度もあるミニマックス多項式近似（2017年8月号）
第3回　軽量ミニマックス近似式の求め方（2017年9月号）