微分方程式を通してみる世界

自然と人間

第4回　古典的ルンゲ・クッタ法VS シンプレクティックオイラー法

中島 隆夫

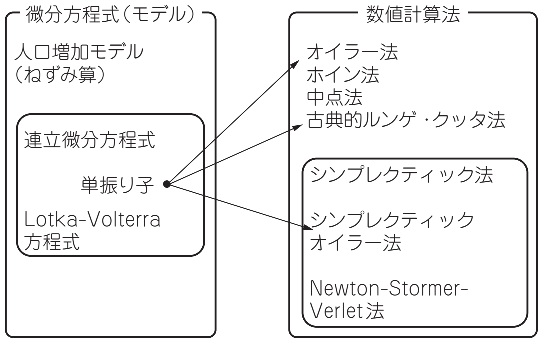

図1　微分方程式（モデル）**と数値計算法**

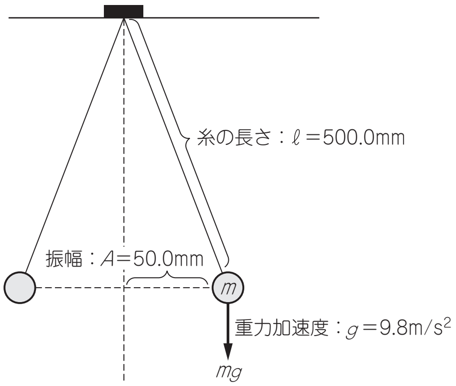

図2　単振り子の構成

前回2023年1月号では，人口増加モデルという単純な微分方程式を幾つかの数値計算法で解き，その精度を評価してみました．結果，関数の傾きの情報をより多く抽出する古典的ルンゲ・クッタ法が，最もよいパフォーマンスを示しました．ではどのような場合でも古典的ルンゲ・クッタ法が最良なのでしょうか．

今回は，古典的ルンゲ・クッタ法では高い精度の計算を必要とする，科学的に重要な微分方程式を取り上げて，もっと低い計算精度で解決する処方箋を紹介します．

●シンプレクティックオイラー法を評価してみる

今回は連立微分方程式のグループから単振り子を取り上げます．オイラー法，古典的ルンゲ・クッタ法，シンプレクティックオイラー法という，3つの数値計算法でシミュレーションしながら，単振り子の運動を表すのに適した数値計算法を探っていきます（**図1**）．

扱う微分方程式は単振り子運動

● 単振り子運動の定式化

今回考える単振り子を**図2**に示します．単振り子は周期運動をします．現実世界では摩擦があるので徐々に止まりますが，摩擦がない理想的な状態では同じ動きを永遠に繰り返します．

数値計算の最初の一歩として，単振り子の運動を定式化してみましょう．単振り子を含む全ての運動は，物体の質量をm，物体の位置をx，かかる力をFとして，次のニュートンの運動方程式に従います．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F \qquad (1)$$

これを単振り子の設定に当てはめてみましょう．振り子の先についている重りにかかる力Fは，

$$F=-\frac{mg}{\ell}x \qquad (2)$$

と書けます．式(1)に式(2)を代入して整理すると，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{\ell}x \qquad (3)$$

2階微分をすると（符号が反転して）自分自身に戻る関数は三角関数ですから，式(3)の解は振幅をx_{max}，$t=t_0$における位相をδとして

$$x(t)=x_{max}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,(t-t_0)+\delta\right) \qquad (4)$$

と書けることになります．

● 解析解の可視化

式(4)を可視化します．**リスト1**でライブラリ類をインポートしたら，**リスト2**を実行してください．

プログラムは本誌サポート・ページから入手できます．
https://interface.cqpub.co.jp/2303py/