第1章 4種のフーリエ変換＆FFTを完全マスタ

フーリエ変換

辰岡 鉄郎

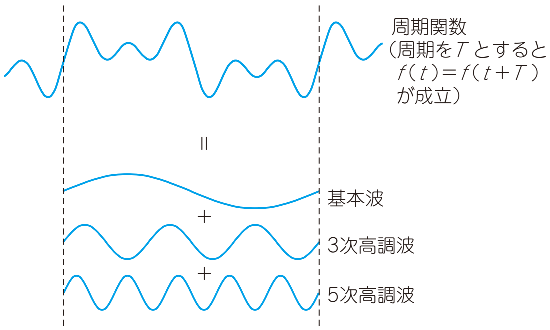

図1　フーリエ級数展開の例…上段の波形は，基本波，3次高調波，5次高調波の3つの波形の和に展開できる

本章では，信号やシステムの周波数解析に用いられるフーリエ変換について解説します．フーリエ変換には，連続時間信号に適用される①フーリエ級数展開と②フーリエ変換(狭義)，離散時間信号に適用される③離散時間フーリエ変換と④離散フーリエ変換(DFT)の4種があります．これらと，離散フーリエ変換を，その規則性を利用して高速化した，高速フーリエ変換(FFT)について式の導出も含め説明します．

第2章では，線形代数に登場する基底変換やベクトルの内積について説明します．時系列信号の集合をベクトルと捉えると，フーリエ変換をイメージで理解することができるようになります．また，内積は，直交性の判定など多次元信号処理にも役立ちます．

第3章では，周波数解析で窓関数が必要となる理由および，窓関数の種類やそれぞれの特徴を説明します．

第4章では，離散信号を扱う上で知っておくべきサンプリング定理とエイリアシング，元のアナログ信号とのスペクトルの関係について解説します．

第5章では，各種スペクトルの定義や，具体的なさまざまな関数のスペクトルの比較，最大エントロピー法など，その他の周波数解析について紹介します．

フーリエ級数展開

● 定義式

まずは，フーリエ級数展開から始めます．フーリエ級数展開は，「周期関数は直流および繰り返しの周期を基本波とするsin波と，その高調波(基本波の整数倍の周波数)の和に展開できる」というものです(**図1**)．簡単な式で書くと

周期関数＝直流成分＋基本波＋2次高調波＋3次高調波…

で，数学的に表現すると，

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t+\theta_k\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

のようにsin波の和で書けます．

ここで，$a_0/2$はDC(直流)成分の振幅で，k/T_0(＝kf_0)はk次高調波の周波数です．直流成分は，後で都合が良いよう1/2としています．

$k=1$での周波数を基本周波数と呼び，$1/T_0$(＝f_0)となります．フーリエ級数展開の定義式は，上記のsin波の和よりも以下のようなsin波とcos波の和，あるいは三角関数の和で表現することもできます．

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right\}\cdots\cdots(2)$$

これらは等価な式を表しており，以下のように式(2)の{ }内を展開すると，

$$\begin{aligned}\{\ \}内&=\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right.\\&=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right)\\&=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\left(\sin\theta_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)+\cos\theta_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right)\\&=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\sin\left(\theta_k+\frac{2\pi k}{T_0}t\right)=A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t+\theta_k\right)\end{aligned}\cdots\cdots(3)$$