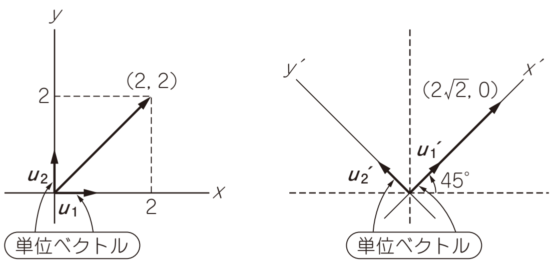
ご購入はこちら

特設 第1部

第2章 フーリエ変換をイメージで理解できるようになる

基底変換と内積

辰岡 鉄郎



(a) 水平なx軸と垂直なy軸で表現した座標(2, 2)

(b) 45°回転させると$(2\sqrt{2}, 0)$に変換される

図1　2次元座標の変換例

線形代数に登場する基底変換やベクトルの内積について説明します．時系列信号の集合をベクトルと捉えると，DFTの計算などを違った目線で考えることができるようになります．また，直交性の判定など多次元信号処理にも役立ちます．

同じベクトルを違う尺度で表す…基底変換

基底変換は，ベクトルの各成分を表す基準となる尺度を変える操作です．基準を変えることで，同じベクトルを別の見方で表現できます．

● 2次元座標を例にイメージする

具体的な例として，2次元の座標変換を考えてみます．xy平面上の点(2, 2)は，水平なx軸と，垂直なy軸の座標系での座標です[**図1(a)**]．これを，**図1(b)**のように，45°回転させた座標系で表現すると，$(2\sqrt{2}, 0)$となります．同じベクトルが$(2, 2) \rightarrow (2\sqrt{2}, 0)$に変換されたのです．これを線形代数的に表すと，$x$軸，$y$軸方向の大きさ1のベクトル(単位ベクトル)を，$u_1$，$u_2$，$x'$軸，$y'$軸方向の単位ベクトルを，$u_1'$，$u_2'$とおくと，座標変換の関係を，

$$2u_1+2u_2=2\sqrt{2}\,u_1'+0u_2' \quad \cdots\cdots(1)$$

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$u_1'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ u_2'=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

と書くことができます．このようにベクトルの定数倍の和の形を，「線形結合」あるいは「線形和」，「一次結合」と呼びます．

また，各成分の尺度を表すu_1，u_2やu_1'，u_2'を「基底」あるいは「基底ベクトル」と呼び，これを変換する操作が基底変換です．

上記の座標変換では「幾何学的に見方を正面から斜めに変えた」と解釈することもできます．例えば，u_1をハードの技術力，u_2をソフトの技術力の指標とすると，u_1'は総合スキル，u_2'はハード偏重度といったように，評価指標を変えていることになります．もし，人事部のエンジニア採用担当が，両方のスキルを持つ人を採用したいなら，u_1，u_2の値よりも，統合した指標u_1'があると有用かもしれません．

このように，基底を注目したい指標にうまく変換できると便利な場合があります．周波数解析を行う場合には，基底を周波数ごとの表現に変えられるとよいわけです．

● 基底変換を波形で考える

2点の時系列信号というのも，いささか非現実的ではありますが，$f(t)$を$f(0)=2$，$f(1)=2$という波形とし，$f(t)=[2,\ 2]$のように表すことにします．また，時刻0のみに1が立つインパルス波形を$u_1(t)=[1,\ 0]$，時刻1のみに1が立つインパルス波形を$u_2(t)=[0,\ 1]$，振幅$1/\sqrt{2}$となる直流波形を$u_1'(t)=[1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}]$，振幅$1/\sqrt{2}$の交流波形を$u_2'(t)=[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$とします．以上をグラフで書くと，**図2**のようになります．

このとき，$f(t)$は，以下の2通りで表現できます．

$$f(t)=2u_1(t)+2u_2(t) \quad \cdots\cdots(4)$$

$$f(t)=2\sqrt{2}\,u_1'(t)+0u_2'(t) \quad \cdots\cdots(5)$$

式(4)のように，時系列波形は各時刻で1となるインパルス列$u_1(t)$と$u_2(t)$を基底とするベクトルと考えることができます．

式(5)は，$f(t)$を直流波形$u_1'(t)$と交流波形$u_2'(t)$