

線形性と時不変性

辰岡 鉄郎

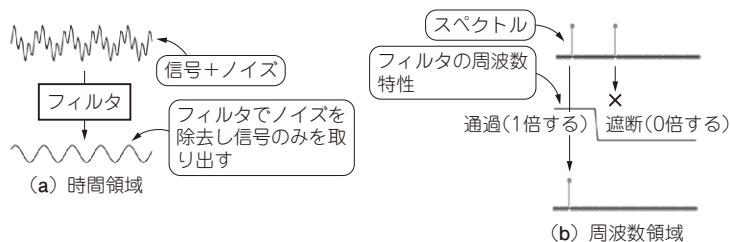


図2 入力に対して処理を行いそれを出力するものをシステムと呼ぶ

図1 信号に加わったノイズを除去するのがフィルタの役割

特集で体験したように、Pythonのライブラリを使えばフィルタを設計するのも適用するのも、いとも簡単にできてしまいました。しかし、どのフィルタを、どの手法で、どのような設定で使うべきか、正しく使いこなすためにはフィルタの知識が欠かせません。

デジタル・フィルタ設計編では、周波数選択性の実現につながる線形時不変性、微分方程式を代数方程式に変換するラプラス変換、差分方程式を代数方程式に変換する離散版ラプラス変換とも言えるz変換を説明し、これらの集大成として最後にFIRフィルタとIIRフィルタの設計法を解説します。

本章では、信号の周波数成分を操作する方法を考えます。図1(a)のように、ノイズの重畳した波形から不要な周波数成分を除去し、必要な信号のみを取り出すにはどうしたらよいでしょうか。これがデジタル・フィルタの問題設定です。

図1(b)のように、周波数領域では欲しい周波数は1倍して通過させ、不要な周波数は0倍して遮断するような、周波数ごとに係数を掛けて、振幅や位相を操作する処理ができれば、周波数選択性を持つフィルタが実現できます。この鍵となる性質に、線形性と時不変性があります。

● 線形性

線形なシステムとは、入力を足したり定数倍すると出力も同じように足したり定数倍されるシステムのことで、ここで、システムとはある入力に対して何らかの処理を行って出力するものを言います(図2)。

この線形性を式で表すと、 $x_1[n]$ を入力したときの

出力を $y_1[n]$ 、 $x_2[n]$ を入力したときの出力を $y_2[n]$ とした場合、

$$f(x_1[n]+x_2[n]) = y_1[n]+y_2[n] \dots\dots\dots(1)$$

$$f(a_1x_1[n]) = a_1y_1[n] \dots\dots\dots(2)$$

が成り立つ、あるいは両式をまとめて、

$$f(a_1x_1[n]+a_2x_2[n]) = a_1y_1[n]+a_2y_2[n] \dots\dots\dots(3)$$

が成り立つことです。

● 時不変性

時不変なシステムとは、同じ入力を与えるといつでも同じ出力を返すシステムのことで、ある入力に対する応答が、今日も明日も気まぐれを起こすことなくいつも同じ、という性質です。

● 線形時不変システムの出力…信号とインパルス応答との畳み込みで計算する

線形性と時不変性を備えたシステムを線形時不変システム (Linear Time-invariant System) と呼びます。線形性により、入力を各時刻のインパルスに分解して考えると図3に示す通り出力はインパルス応答と各サンプル値との積の重ね合わせになります。

ここで、インパルス応答とは図4のように何らかのシステムに単位インパルスを入力した場合に得られる応答のことで、時不変性により時刻によらず同一です。線形時不変システムにおいて、インパルス応答はシステムの挙動(入出力の関係を)決定する、重要な情報と言えます。

以上の性質により、線形時不変システムの出力はインパルス応答の畳み込みで表すことができます。入力