第2章 アナログに寄り道…回路の微分方程式を代数方程式に変換，フィルタを実現する伝達関数を手に入れる

ラプラス変換と伝達関数

辰岡 鉄郎

ラプラス変換は，微分方程式を代数方程式に変形し，簡単に解くことができる便利なツールです．処理の実体は，フーリエ変換の収束しない問題を解決する細工を施した，フーリエ変換の発展版です．入力信号に単位ステップ関数を掛ける（積分範囲を0～∞とする）ことと，sを$c+j\Omega$と置く細工をフーリエ変換の式に施すと，次のラプラス変換の式が得られます．

$$L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \quad \cdots\cdots(1)$$

一方，ラプラス逆変換の式はラプラス変換とフーリエ変換の関係，

$$X(s) = \int_{-\infty}^\infty x(t)u_0(t)e^{-(c+j\Omega)t}dt = \mathcal{F}[x(t)u_0(t)e^{-ct}] \quad \cdots\cdots(2)$$

から，両辺を入れ替えてフーリエ逆変換します．

$$x(t)u_0(t)e^{-ct} = \mathcal{F}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty X(s)e^{j\Omega t}d\Omega \quad \cdots\cdots(3)$$

両辺にe^{ct}を掛けて，

$$\begin{aligned} x(t)u_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty X(s)e^{ct}e^{j\Omega t}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty X(s)e^{(c+j\Omega)t}d\Omega \end{aligned} \quad \cdots\cdots(4)$$

となります．ここで，$s=c+j\Omega$より，$ds=jd\Omega$と変数変換すると，ラプラス逆変換の式が得られます．

$$x(t)u_0(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds \quad \cdots\cdots(5)$$

ラプラス変換で，負側の信号は単位ステップ関数を掛けることにより情報が失われているため，逆変換で復元できる値は時刻0以降のみとなっています．積分範囲は，実軸上の点cを通る虚軸に平行な直線に沿って積分されることになります．

● ラプラス変換も基底変換の一種

フーリエ変換は周期関数を基底とする基底変換であると述べました．ラプラス変換も，逆変換で再構成できるので，e^{st}を基底とした基底変換と考えることができます．相違は，フーリエ変換では指数が純虚数であるのに対し，ラプラス変換では複素数である点です．

$e^{st}=e^{ct}\cdot e^{j\Omega t}$と項を分けて考えると，基底は**図1**のような時刻tの増加とともにe^{ct}で振幅が大きくなる関数となります．ここで，時刻無限大で発散するような波形が基底となりうるのか，と疑問に思われるかもしれません．これは，逆に時刻無限大で0になるe^{-ct}という信号を，フーリエ逆変換で再構成できることを考えれば，e^{-ct}を信号に掛けるか，e^{ct}を基底に掛けるかの違い，と考えれば合点がいくでしょうか．

ラプラス変換後の変数sの世界は，s領域と呼ばれます．あるいは，フーリエ変換と同様，周波数領域と呼ばれる場合もあります．

● ラプラス変換の計算例

具体的に，幾つかの関数でラプラス変換を適用してみます．

▶指数関数e^{at}

指数関数e^{at}のラプラス変換を求めると，

$$\begin{aligned} L[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \end{aligned} \quad \cdots(6)$$

となります．

▶単位ステップ関数

単位ステップ関数$u_0(t)=1\ (t \geqq 0)$のラプラス変換を求めると，

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s} \quad \cdots\cdots(7)$$

となります．

● 微分のラプラス変換を求める

単位ステップ関数を掛けた信号の，微分のラプラス変換を求めてみます．積の微分法則$(f'\cdot g)=(f\cdot g)'-f\cdot g'$より，

$$\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)u_0(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t)u_0(t)\right) - x(t)\frac{d}{dt}u_0(t) \quad \cdots\cdots(8)$$

と展開して各項を求めます．右辺の第1項は，$x(t)u_0(t)$のラプラス逆変換より，