ご購入はこちら

特設 第2部

第3章 ラプラス変換のディジタル版… 1サンプル遅延をz^{-1}で表せるだけでこんなに便利

z変換

辰岡 鉄郎

● zの意味

ラプラス変換では，指数関数などの一般的な関数で収束するように，フーリエ変換を拡張して$s=c+j\Omega$と置き，かつ積分範囲を時刻0以降としました．離散信号版も同じように，$s'=c+j\omega$としたいところですが，連続時間信号と異なり微分方程式は出てこないので，あまり便利ではありません．

結論から言うと，指数関数をまとめて，$z=e^{c+j\omega}$と置き，かつΣの和の範囲を0以上とすることで，離散時間信号で便利な変換になります．このように離散時間フーリエ変換を置き換えた変換をz変換，その変換後の変数zの世界をz領域と呼びます．

● 定義

z変換の定義式は以下の通りです．

$$X(z)=Z[x[n]]=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \quad \cdots\cdots(1)$$

z変換の式の添字の範囲を$-\infty$からとするためステップ関数を掛け，$z=e^{c+j\omega}$を代入して，フーリエ変換に書き直すと，

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]u_0[n]\,e^{-(c+j\omega)n}=\mathcal{F}[x[n]\,u_0[n]e^{-cn}] \quad \cdots\cdots(2)$$

となります．両辺を入れ替えてフーリエ逆変換し，

$$x[n]\,u_0[n]e^{-cn}=\mathcal{F}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(z)e^{j\omega n}d\omega \quad \cdots\cdots(3)$$

両辺にe^{cn}を掛けると，

$$x[n]\,u_0[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(z)e^{cn}\,e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(z)e^{(c+j\omega)n}\,d\omega \quad \cdots\cdots(4)$$

と変形できます．ここで，$z=e^{c+j\omega}$より$dz=je^{c+j\omega}d\omega$と変数変換すると，

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}X(z)e^{(c+j\omega)n}\,e^{-(c+j\omega)}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}X(z)e^{(c+j\omega)(n-1)}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}X(z)z^{n-1}dz \quad \cdots\cdots(5)$$

となり，以下の逆z変換の式が得られます．

$$x[n]\,u_0[n]=Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}X(z)z^{n-1}dz \quad \cdots\cdots(6)$$

ラプラス変換同様，負側の信号は単位ステップ関数を掛けることにより情報が失われているため，逆変換で復元できる値は$n=0$以降のみになります．積分範囲はΓで表していますが，半径e^cの円周上を$-\pi$～$+\pi$で積分されることになります．

● 離散時間信号の状態は差分方程式で表す

連続時間信号では，システムの入出力関係の多くは微分方程式，

$$\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\right\}y(t)=\left\{\sum_{k=0}^{M}b_k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\right\}x(t) \quad \cdots\cdots(7)$$

で表され，ラプラス変換はこの解を求めるのに有用でした．また，伝達関数によりシステムの周波数応答やインパルス応答の導出，安定性などの判定に役立つと述べました．

離散時間信号では，システムの入出力関係は，出力を過去の出力と入力の線形和で表した差分方程式，

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \quad \cdots\cdots(8)$$

で表されます．上式は，係数を$a_0=1$，$a_k=-a_k(k\geq1)$とすることで，

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \quad \cdots\cdots(9)$$

という，微分方程式の一般形と似た形で表現することもできます．

● z変換の計算例

ここでは指数関数を例にz変換の計算例を説明します．指数関数をz変換の定義式に，指数関数a^nを代入すると以下のようになります．

$$Z[a^n]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=a^0 z^{-0}+a^1 z^{-1}+a^2 z^{-2}+\cdots \quad (10)$$