第2章 sin関数とcos関数のさまざまなグラフを「積分窓」を通して眺めてみると…ある推論が得られる

フーリエ級数展開に必要な定積分の復習

白川 仁

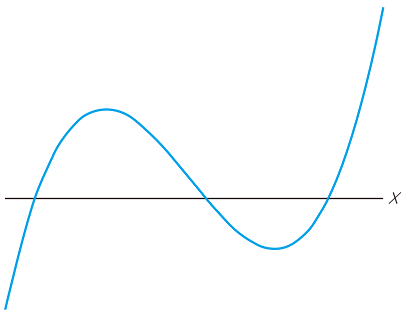

図1 関数$f(x)=\frac{5}{48}x^3-\frac{7}{16}x^2-\frac{2}{3}x+2$のグラフ
関数を可視化する1つの方法としてグラフを描くことが挙げられる．本来，縦軸を明記するべきであるが，ここでは省略してある．この関数は，本稿のために作成したもので深い意味はない

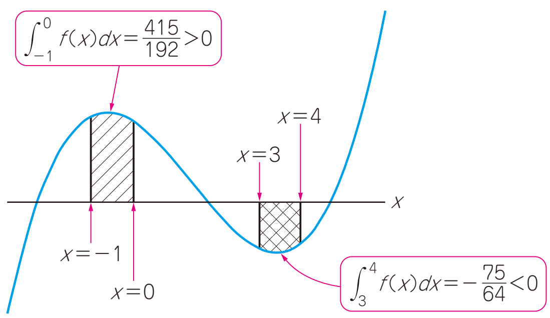

図2 定積分が表現する「正の面積」と「負の面積」
領域がx軸より上にある場合（斜線部分），定積分は正の面積を表現し，領域がx軸より下にある場合（網掛け部分），定積分は負の面積を表現する．定積分の具体的な値は示してあるが，特に深い意味はない

第1章で紹介した式(1.2)および式(1.3)にある通り，フーリエ級数展開は定積分を使います．この章では，定積分について簡単な復習と，sin関数およびcos関数の定積分に関する性質を確認しておきましょう．

定積分のおさらい

● 定積分は面積？

図1に示すのは，関数$f(x)=\frac{5}{48}x^3-\frac{7}{16}x^2-\frac{2}{3}x+2$のグラフです．この関数$f(x)$は，筆者が本稿のために苦労して作成した関数なのですが，それはさておき，次式の定積分は，**図2**の斜線部分の面積です．

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{415}{192}=I_1 \quad\cdots\cdots(2.1)$$

面積なので，定積分の計算結果I_1は，正の値であると言われても違和感はないと思います．ところで，次式は**図2**の網掛け部分の面積でしょうか．

$$\int_{3}^{4} f(x)\,dx=-\frac{75}{64}=I_2 \quad\cdots\cdots(2.2)$$

定積分の計算結果I_2は負の値なので，定積分$\int_3^4 f(x)dx$を面積と言うのは違和感があります．しかし，定積分の計算結果I_2の絶対値$|I_2|$は**図2**の網掛け部分の面積になっています．定積分の計算結果I_2を負の面積と考えれば，定積分は符号付き面積と考えられます．**図2**の斜線部分は，x軸より上にある領域なので正の値をとり，**図2**の網掛け部分はx軸より下にある領域なので負の値をとります．

● 定積分の結果がゼロになることもある

定積分の計算結果は，正の値にも負の値にもなるので，うまく調整すれば，定積分の計算結果がゼロになることもあるでしょう．次式の定積分は，**図3**の斜線部分と網掛け部分の符号付き面積の合計値です．

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx=0 \quad\cdots\cdots(2.3)$$

斜線部分は正の面積で，網掛け部分は負の面積となっており，両者の絶対値が等しいので，互いに打ち消し合って定積分の計算結果はゼロとなります．

正の面積と負の面積が互いに打ち消し合うことは**図4**の$\sin x$のグラフを見ると一目瞭然です．正の面積である斜線部分と負の面積である網掛け部分が打ち消し合うことで，次式が視覚的に理解できると思います．

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx=0 \quad\cdots\cdots(2.4)$$