

三角関数の周期性や、それらの線形結合を考えたときに
見えてくる真実とは

フーリエ級数展開の式を直感的に理解する

白川 仁

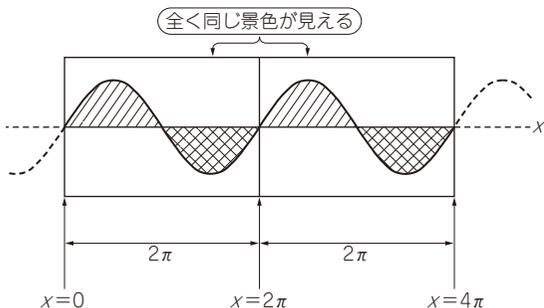


図1 $\sin x$ の周期性①…隣接する積分窓を見てみる
左端が $x=0$ であり、幅が 2π の積分窓を通して見える景色(左側)と、左端が $x=2\pi$ であり、幅が 2π の積分窓を通して見える景色(右側)は全く同じである

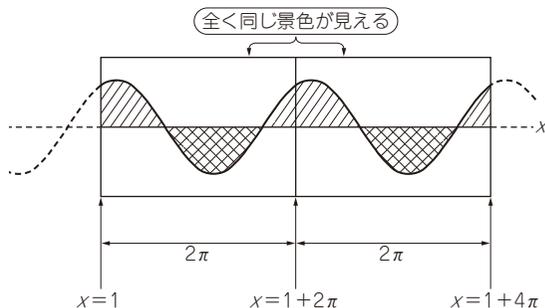


図2 $\sin x$ の周期性②…積分窓の左端をずらしてみる
左端が $x=1$ であり、幅が 2π の積分窓を通して見える景色(左側)と、左端が $x=1+2\pi$ であり、幅が 2π の積分窓を通して見える景色(右側)は全く同じである

第2章では、 \sin 関数および \cos 関数の定積分に関する特徴的な性質を確認しました。それら定積分に関する特徴は $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$, …が周期的な性質を持っていることに起因します。

この章では、 $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$, …が周期 2π の周期関数であることを直感的に確認し、第1章で示した式(1.1)が実に妥当な考え方に基づいて成り立っていることを理解します。

● $\sin x$ には周期性がある？

第2章では左端が $x=0$ 、幅が 2π の積分窓を通してグラフを見ていました。他の積分窓を通してグラフを見ると、どんな景色が見えるのでしょうか。

▶隣接する積分窓を見てみる

$\sin x$ のグラフを左端が $x=0$ 、幅が 2π の積分窓と、隣接する左端が $x=2\pi$ 、幅が 2π の積分窓を通して眺めてみましょう。図1の左側の積分窓を通して見える景色と、右側の積分窓を通して見える景色は、全く同じであることが分かります。

▶積分窓の左端をずらしてみる

積分窓の左端を少しずらしたらどうでしょうか。図2では、左側の積分窓の左端が $x=1$ で、右側の積分窓の左端が $x=1+2\pi$ となっており、幅は両方とも

2π のまま変えていません。積分窓の左端を変えても左側と右側の積分窓を通して見える景色はやはり全く同じであることが分かります。

▶積分窓の幅を変えてみる

積分窓の幅を変えるとどうなるのでしょうか。図3では左側の積分窓の左端が $x=0$ で、右側の積分窓の左端が $x=\frac{3}{2}\pi+1$ となっていて、幅は両方とも $\frac{3}{2}\pi+1$ となっています。

積分窓の幅が 2π から $\frac{3}{2}\pi+1$ へ変わった図3におい

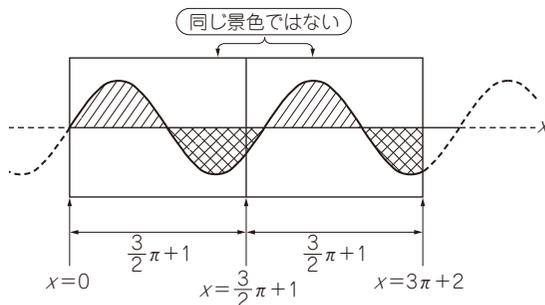


図3 $\sin x$ の周期性③…積分窓の幅を変えてみる
左端が $x=0$ で、幅が $\frac{3}{2}\pi+1$ の積分窓を通して見える景色(左側)と、左端が $x=\frac{3}{2}\pi+1$ で、幅が $\frac{3}{2}\pi+1$ の積分窓を通して見える景色(右側)は同じではない