第4章　ベクトルのおさらいから結合係数の求め方まで

線形代数の視点から フーリエ級数展開を理解する

白川 仁

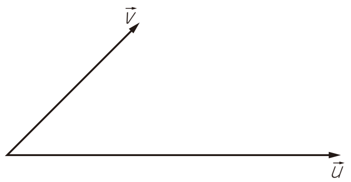

図1　平面上の2つのベクトル

第3章では，第1章で示した式(1.1)は「周期が2πである周期関数1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，$\cos 3x$，$\sin 3x$，…を混ぜて，周期が2πである何かしらの周期関数$f(x)$を合成しようとするものである」と説明しました．

どれだけ混ぜるのかの重みの役割を担うのが結合係数$\frac{a_0}{2}$，a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3，…です．これらの結合係数は，当然，合成したい周期2πの周期関数に合わせた適切な値にしなければなりません．例えば，周期2πののこぎり波を合成するには，$\cos 2x$はどれだけ混ぜ込めばよいのか，つまり，a_2はどんな値にすればよいのか…これはどうやって決めればよいのでしょうか．

本章では，結合係数$\frac{a_0}{2}$，a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3，…の値を決める方法を線形代数の視点から考えます．これから紹介する方法では，ベクトルの内積を使うので，まずはベクトルについておさらいします．

ベクトルのおさらい

● ベクトルの和

高校数学で学んだベクトルは，矢印として表現されたものでした．細かいことは抜きにして，**図1**に示す通り，平面上[注1]にベクトル$\vec{u}$とベクトル$\vec{v}$が存在している場合を考えます．

図2に示す通り，ベクトル$\vec{w}$はベクトル$\vec{u}$とベクトル$\vec{v}$の和$\vec{u}+\vec{v}$で表現できます．ベクトル$\vec{x}$は，ベクト

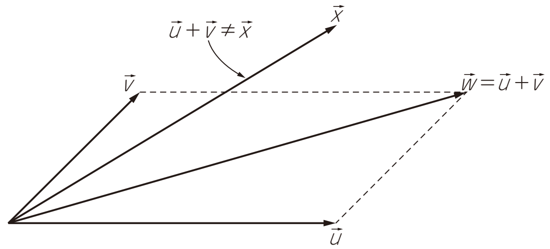

図2　おさらい1…ベクトルの和
ベクトル$\vec{u}$とベクトル$\vec{v}$の和$\vec{u}+\vec{v}$でベクトル$\vec{w}$を表現できる．当然，$\vec{u}+\vec{v}\neq\vec{x}$である

ル$\vec{u}$とベクトル$\vec{v}$の和$\vec{u}+\vec{v}$ではないことは当然であると理解できると思います．

● ベクトルの実数倍

図3に示す通り，平面上にベクトル$\vec{v}$とベクトル$\vec{y}$および$\vec{z}$が存在している場合を考えます．

ベクトル$\vec{v}$，$\vec{y}$の長さは，それぞれ$|\vec{v}|$，$|\vec{y}|$と表現します．ベクトル$\vec{y}$の長さ$|\vec{y}|$がベクトル$\vec{v}$の長さ$|\vec{v}|$の2倍である場合，つまり，$|\vec{y}|=2|\vec{v}|$である場合，ベクトル$\vec{y}$をベクトル$\vec{v}$の実数倍$2\vec{v}$を用いて，次の通り表現できます．

$$\vec{y} = 2\vec{v}$$

$2\vec{v}$とは，ベクトル$\vec{v}$の向きを変えずに長さを2倍に引き伸ばしたものです．一方で，ベクトル$\vec{z}$は，ベクトル$\vec{v}$と真逆なので，次の通り表現できます．

$$\vec{z} = -1\vec{v} = -\vec{v}$$

ベクトル$\vec{v}$の実数倍$c\vec{v}$とは，ベクトル$\vec{v}$の向きを変えずに引き伸ばした(あるいは縮めた)か，向きを真逆にして引き伸ばした(あるいは縮めた)ベクトルです．

● ベクトルの線形結合

図2では，ベクトル$\vec{x}$をベクトル$\vec{u}$とベクトル$\vec{v}$の和$\vec{u}+\vec{v}$で表現できませんでした．同様にベクトル$\vec{u}$だけを引き伸ばしたり縮めたりしても，ベクトル$\vec{x}$は表現できないので，ベクトル$\vec{u}$の実数倍だけでベクトル$\vec{x}$を表現することはできません．

注1：平坦な机の上に矢印があると考えてもらえれば十分です．このあたりも気にし始めるとかなり深い理解を要します．