第5章 複素フーリエ級数展開への書き換えから発展の流れをつかむ

フーリエ級数展開とフーリエ変換の関係

白川 仁

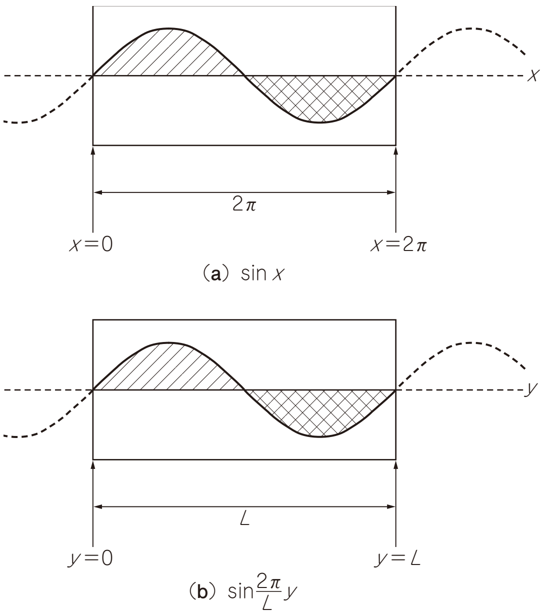

図1 周期 2π の sin x ではなく周期 L の周期関数 $\sin\frac{2\pi}{L}y$ でも積分窓からは同じ風景が見える
sin x を左端 $x=0$，幅 2π の積分窓から見る風景(a)と，$\sin\frac{2\pi}{L}y$ を左端 $x=0$，幅 L の積分窓から見る風景(b)は同じに見える

第1章で紹介した式(1.1)は，周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開です．周期が 2π でなく一般の周期 L である周期関数 $g(y)$ のフーリエ級数展開はどうなるのでしょうか．

この章では，一般周期 L の周期関数への拡張，さらに，複素フーリエ級数展開への書き換えからフーリエ変換への流れについて簡単に紹介します．

複素フーリエ級数展開

● 周期 L の sin 関数や cos 関数のグラフを積分窓から見てみる

$\sin x$ は周期 2π の周期関数でした．$\sin x$ に対応する周期 L の周期関数は $\sin\frac{2\pi}{L}y$ です．**図1**において，$\sin x$ と $\sin\frac{2\pi}{L}y$ を比較すれば，直感的に理解できると思います[注1]．

同様に，$\cos x$ に対応する周期 L の周期関数は $\cos\frac{2\pi}{L}y$ です．$\sin 2x$ に対応する周期 L の周期関数は $\sin\frac{2\pi\cdot 2}{L}y$，$\cos 2x$ に対応する周期 L の周期関数は $\cos\frac{2\pi\cdot 2}{L}y$，$\sin 3x$ に対応する周期 L の周期関数は $\sin\frac{2\pi\cdot 3}{L}y$，$\cos 3x$ に対応する周期 L の周期関数は $\cos\frac{2\pi\cdot 3}{L}y$ です．

これらを受け入れるのであれば，式(1.1)は，次式に書き換えられることが分かると思います．

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{L}y+\sin\frac{2\pi n}{L}y\right)\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

結合係数 a_n および b_n を決定する式(1.2)，式(1.3)については，書き換えの過程を割愛しますが，次式の通り書き換えられます．

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(y)\cos\frac{2\pi n}{L}ydy\cdots\cdots(5.2)$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(y)\sin\frac{2\pi n}{L}ydy\cdots\cdots(5.3)$$

● 複素フーリエ級数展開への書き換え

唐突ですが，次に示すのはオイラーの公式です．

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\cdots\cdots(5.4)$$

式(5.4)より，

$$e^{i(-x)}=\cos(-x)+i\sin(-x)\Rightarrow e^{-ix}=\cos x-i\sin x\cdots\cdots\cdots(5.5)$$

を得るので，式(5.4)，式(5.5)より次式が得られます．

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\cdots\cdots\cdots(5.6)$$

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\cdots\cdots(5.7)$$

式(5.6)，式(5.7)より，

注1：なぜ $\frac{2\pi}{L}$ なのか，その本質は説明していません．要するに，これは置換積分と同じ置換なのです．積分のテクニックとしてではなく，置換積分の本質を理解していれば，一般周期のフーリエ級数展開への道筋はおのずと見えて来るのですが…いかがでしょう．