第3章 ドローンに働くトルク計算/運動応答のモデリング/姿勢の算出

数学モデルの作成

https://interface.cqpub.co.jp/2209tb2/
リストや参考文献はコチラから参照できます

藤原 大悟

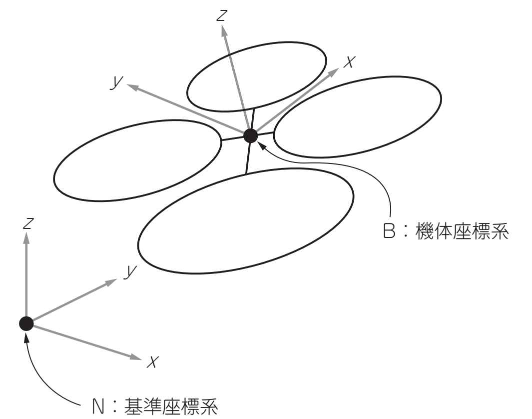

図1　座標系の定義

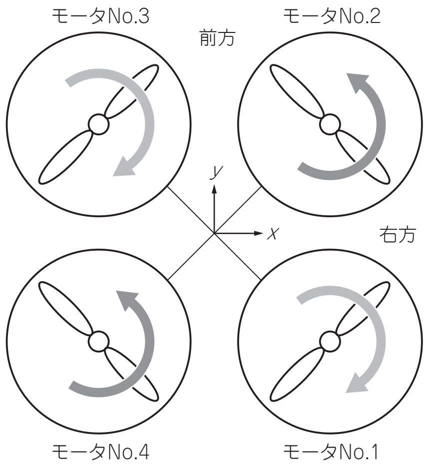

図2　モータ（プロペラ）の番号と回転方向の定義

第3章からはドローンの数学モデルをなす数式を立てた後，それをシミュレーションや制御系設計に実際に使える形にすべく，MATLABのプログラムやSimulinkのブロック線図に落とし込んでいきます．

ここで作るモデルは，モータのPWM指令値から，速度，位置，角速度，クォータニオン，オイラー角を求めるものです．数式そのものについては，文献(1)で解説してあるので，詳しくはそちらを見てもらうとして，ここでは簡単におさらいします．なお，文献(1)は以下のURLから閲覧できます．

https://interface.cqpub.co.jp/2209tb2/

モデリングに際して与える定義/前提条件/仮定

ドローンはx-z平面とy-z平面に関して対称な形状/質量分布であるクワッドコプタとします．トリム飛行状態はホバリングとし，ホバリングおよびその近傍(低速飛行)の運動を考え，機体胴体が受ける空気抵抗(有害抵抗)は無視し得るとします．プロペラのDCモータを駆動するPWM信号の指令値(パルス幅)に対する，プロペラの推力あるいは空力トルクの関係は，いずれも線形であるとします．

ここでトリム(trim)とは，釣り合い，つまり機体胴体に働く力の釣り合いが取れた状態のことを言います．これは，例えばホバリングや等速直線運動のような定常状態を指します．どのような飛行状態をトリム飛行状態とするかは設計者が都度決めることになります．トリム状態で各変数がとる値をトリム値と呼びます．

● 座標系

図1を使って座標系を定義します．機体の重心を原点とし，ロータ面内にx軸およびそれと直交するy軸，これらに対し垂直かつ上方にz軸をとった右手系を機体座標系B(または機体軸)とします．機体が地面に着陸し，ロータ面が水平になっているときの機体座標系に一致し，かつ地面に固定された座標系を基準座標系Nとします．

● モータ番号と回転方向

モータおよびプロペラには**図2**のように番号を振ります．プロペラの回転方向もこの図の通りとします．また，機体座標系Bについて，機体の前方(2番・3番の側)をy軸，右方(1番・2番の側)をx軸とします．

◆参考文献◆
(1) 藤原 大悟：高度な制御のための運動のモデル化＆定式化，Interface，2020年3月号，pp.74-80，CQ出版社.

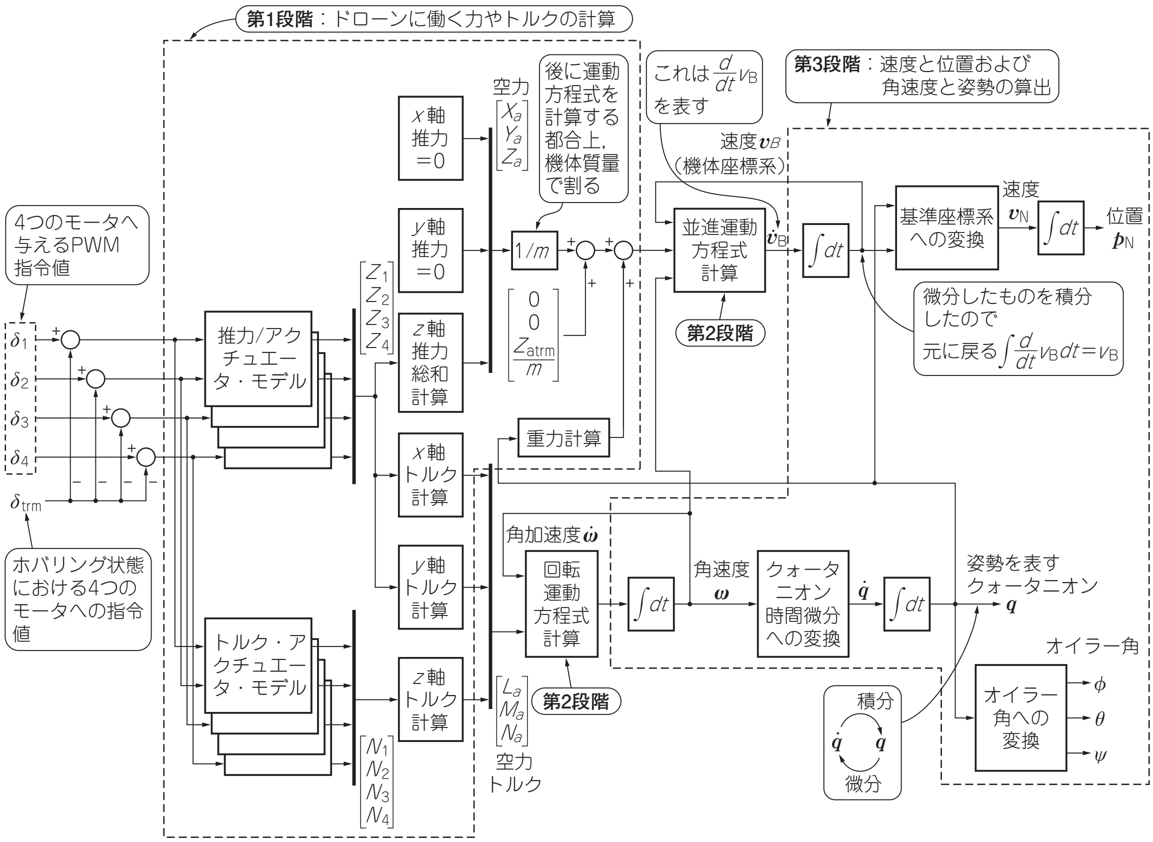

図3　モデルの構造…3段階で運動モデルを構築する

● 機体の姿勢角

機体の姿勢の角度を表すには，オイラー角がよく使われます．N座標系を起点に，z軸周りに角度ψ，y軸周りに角度θ，x軸周りに角度ϕの順で座標系を回転させ，B座標系に一致したとします．このとき，ψがヨー角，θがロール角，ϕがピッチ角となります．

なお，上記の座標系の取り方は，STマイクロエレクトロニクスが提供しているドローン評価キットSTEVAL-DRONE01のファームウェアに合わせたもので，一般的な航空機の力学における座標系の取り方とは異なります．

数学モデル

数学モデルの全体構造を**図3**に示します．信号の流れは一部の例外を除いて左から右へ向かいます．

第1段階…ドローンに働く力やトルクの計算
第2段階…運動方程式の計算による加速度/角加速度の算出
第3段階…加速度/角加速度の積分による速度/位置および角速度/姿勢の算出

また，運動には重心の位置変化を表す並進運動と，機体胴体の姿勢変化を表す回転運動の2つがあり，これら2つは互いに影響を及ぼしています．

● 第1段階…ドローンに働く力やトルクのモデリング

ドローンは，4つのモータへ与えるPWM（Pulse Width Modulation）を受け取ってモータを駆動します．従って，それを受け取るところが最初の入り口になります．1～4番のモータの指令値をそれぞれδ_1，δ_2，δ_3，δ_4［LSB］とします．また，PWM指令値のトリム値をδ_{trm}とします．δ_1，…，δ_4おのおのからδ_{trm}を差し引いて，トリム値からの変化分に直します．これは，トリム値近傍において，PWM指令値に対するプロペラの推力や空力トルクの関係を線形と仮定し，次に来る推力/アクチュエータ・モデルとトルク・アクチュエータ・モデルを線形なシステムとして表現するためです．

推力/アクチュエータ・モデルは式(1)，トルク・アクチュエータ・モデルは式(2)で表すことにしました．

$$\frac{\overline{Z}_i(s)}{\Delta\overline{\delta}_i(s)}=\frac{K_\mathrm{T}}{\tau_\mathrm{T}s+1}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$N_i=K_Q\Delta\delta_i\quad\cdots\cdots(2)$$

式(1)は伝達関数表現であり，この数式の形は1次遅れ系と呼ばれ，K_Tはゲイン[N/LSB]，τ_Tは時定数[s]です．iはモータ・プロペラの番号($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$)，Z_iはプロペラの推力[N]，$\Delta\delta_i$は$(\delta_i-\delta_\mathrm{trm})$，$\overline{Z}_i(s)$と$\overline{\delta}_i(s)$はそれぞれ$Z_i$と$\Delta\delta_i$のラプラス変換です．式(2)は単純な比例関係で，$K_Q$はゲイン[Nm/LSB]，$N_i$は各プロペラ・トルクの，トリム飛行状態からの変化分[Nm]です．

各プロペラの推力とトルクを機体の重心に働く機体軸3軸に関する力とトルクに変換します．推力はz軸方向成分のみを持つものとし，空力ベクトル$\boldsymbol{F}_\mathrm{a}$は次式となります．機体質量$m$[kg]で割って表しています．$Z_\mathrm{atrm}$は，トリム飛行状態におけるプロペラ推力の合計です．$Z_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$は，各プロペラ推力のトリム飛行状態からの変化分であり，実際に機体に働く空力を得るにはZ_atrmを加算します．

$$\frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{a}}{m}=\frac{1}{m}\begin{bmatrix}X_\mathrm{a}\\Y_\mathrm{a}\\Z_\mathrm{a}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{Z_\mathrm{atrm}}{m}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\begin{bmatrix}X_\mathrm{a}\\Y_\mathrm{a}\\Z_\mathrm{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)\quad\cdots\cdots(4)$$

プロペラ推力が，x軸周りのトルクL_aとy軸周りのトルクM_aを発生し，z軸周りのトルクN_aはプロペラ・トルクが発生源となります．つまり次式となります．

$$\begin{bmatrix}L_\mathrm{a}\\M_\mathrm{a}\\N_\mathrm{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_\mathrm{army}&&\\&l_\mathrm{armx}&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\Z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(5)$$

ここで，l_armx，l_army[m]は，隣り合うプロペラ間の距離の1/2であり，それぞれx軸に平行な成分(モータ4⇔モータ1間とモータ2⇔モータ3間)とy軸に平行な成分(モータ1⇔モータ2間とモータ3⇔モータ4間)です．

機体に働くもう1つの力である重力の方向は，基準座標系のz軸に平行です．これを機体座標系で表現し直します．3次元空間内のあるベクトルの代数表現を基準座標系と機体座標系の間で相互変換するために用いる行列C_Bを次式に示します．q_0，q_1，q_2，q_3は基準座標系に対する機体座標系の姿勢を表すクォータニオンです．

$$C_\mathrm{B}=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2&2(q_1q_2-q_3q_0)&2(q_3q_1+q_2q_0)\\2(q_1q_2+q_3q_0)&q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2&2(q_2q_3-q_1q_0)\\2(q_3q_1-q_2q_0)&2(q_2q_3+q_1q_0)&q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(6)$$

C_Bの右から機体座標系で表現された3次列ベクトルを掛けると，基準座標系で表現した3次列ベクトルが得られます．C_Bの転置行列，C_B^Tの右から基準座標系で表現された3次列ベクトルを掛けると，機体座標系で表現した3次列ベクトルが得られます．重力は，重力加速度の大きさをg[m/s^2]として，基準座標系上では，

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-mg\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(7)$$

なので，機体座標系で表現し，機体質量mで割ると，次式となります．これを式(3)に加えると，機体に働く外力の合力が得られます．

$$-g\begin{bmatrix}2(q_3q_1-q_2q_0)\\2(q_2q_3+q_1q_0)\\q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(8)$$

● 第２段階…力やトルクが機体に働いたときの運動応答のモデリング

運動方程式の計算は，機体に加わる力とトルクから，機体の速度/角速度の時間微分を算出するもので，力を運動へ変換する処理です．ドローンを含め航空機の運動方程式は，機体座標系(動座標系)で表現します．

回転の運動方程式は式(9)となります．ここで，演算子「×」はベクトルの外積，Jは慣性行列，J^{-1}はJの逆行列，$\boldsymbol{\omega}$は機体3軸周りの角速度ベクトル，Ntotalは機体に働く重心周りのトルク・ベクトルです．慣性行列Jの成分のうち，対角成分J_{xx}，J_{yy}，J_{zz}は慣性モーメント，それ以外の成分J_{xy}，J_{yz}，J_{zx}は慣性乗積と呼びます．いずれも単位は[kg・m^2]です．機体はx-z平面とy-z平面に関して対称と仮定しているので，$J_{xx}=J_{yy}$および$J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0$となります．

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=-J^{-1}\{\omega\times(J\omega)\}+J^{-1}N_\mathrm{total}\quad\cdots\cdots(9)$$

$$J=\begin{bmatrix}J_{xx}&J_{xy}&J_{zx}\\J_{xy}&J_{yy}&J_{yz}\\J_{zx}&J_{yz}&J_{zz}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(10)$$

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\boldsymbol{N}_\mathrm{total}=\begin{bmatrix}L_\mathrm{a}\\M_\mathrm{a}\\N_\mathrm{a}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(12)$$

並進運動とは，重心が移動する運動のことです．運動方程式は，次式となります．

コラム 制御系を設計する際の2つのアプローチ

藤原 大悟

一般に制御系を設計する際には，大きく2つのアプローチがあります．

①制御対象の事前情報を用いず，実機を用いてトライ&エラーで設計を行う

複雑な数式を扱う面倒さ，煩雑さを避けることができる点がメリットです．一方，トライ&エラーに時間と手間を要し，また，不適切な制御プログラムを実装すると暴走や墜落を引き起こす危険がある点がデメリットです．

②制御対象の運動を数式で表した数学モデル（フライト・シミュレータの内部で動作する計算式の部分を抜き出したもの）を用いて設計を行う

モデルベース制御系設計（MBD：Model-Based control-system Design）と呼ばれ，コンピュータ上のシミュレーションで制御系の設計，チューニングが何度でもでき，実機によるトライ&エラーを減らせる点がメリットです．一方，制御系設計に先立ち，運動方程式などを用いて数学モデルを作る手間が生じる点がデメリットになります．

＊

これらメリット，デメリットを天秤に掛けて，どちらの方法をとるかを選択することになるのですが，航空機に関しては，墜落などの事故を引き起こすと多くの被害が生じます．これは避けなくてはならないので，自然と②を選択することになり，この解説でも同様の方法をとることとします．

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}+\frac{1}{m}\boldsymbol{F}_{\mathrm{total}} \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} v_{x\mathrm{B}} \\ v_{y\mathrm{B}} \\ v_{z\mathrm{B}} \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\frac{1}{m}\boldsymbol{F}_{\mathrm{total}} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}}{m} - g\begin{bmatrix} 2(q_3q_1-q_2q_0) \\ 2(q_2q_3+q_1q_0) \\ q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(15)$$

ここで，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$は機体3軸の速度ベクトル，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{total}}$は機体重心に働く力ベクトルです．$\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{B}}$は機体座標系で表現された機体速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$の時間微分です．

● 第3段階…姿勢や位置のキネマティクスの計算方法

機体座標系での速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$は，時間微分である$\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{B}}$を時間で1階積分すれば得られます．位置は基準座標系で算出します．行列C_{B}を用いて$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$を基準座標系での表現に変換してから積分すれば基準座標系上での位置$\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}}$が得られます．

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \int \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{B}}\,dt \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} p_{x\mathrm{N}} \\ p_{y\mathrm{N}} \\ p_{z\mathrm{N}} \end{bmatrix} = \int C_{\mathrm{B}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}\,dt \quad\cdots\cdots(17)$$

機体座標系での角速度ωは，時間微分である$\dot{\boldsymbol{\omega}}$を時間で1階積分すれば得られます．次に姿勢は，まずクォータニオンで算出します．角速度$\boldsymbol{\omega}$をクォータニオンの時間微分$\dot{\boldsymbol{q}}$に変換し，時間で1階積分して得ます．

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \int \dot{\boldsymbol{q}}\,dt \quad\cdots\cdots(19)$$

クォータニオンからオイラー角ϕ，θ，ψへ変換する式は次の通りです．

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\theta = \sin^{-1}\{2(q_0q_2-q_1q_3)\} \quad\cdots\cdots(21)$$

$$\psi = \tan^{-1}\frac{2(q_0q_3+q_1q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2} \quad\cdots\cdots(22)$$

ふじわら・だいご