微分方程式を通して見る世界

自然と人間

第3回　オイラー法，ホイン法，中点法，古典的ルンゲ・クッタ法を比べる

中島 隆夫

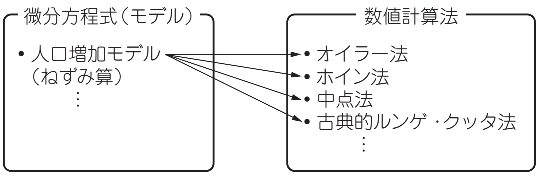

図1　微分方程式（モデル）と数値計算法

リスト1　ライブラリー式のインポート

```
! pip install japanize-matplotlib
                        # グラフの日本語表示等に必要なライブラリ

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import japanize_matplotlib
from math import sqrt
```

前回（第2回，2022年11月号）はさまざまな自然現象が微分方程式で表されることに注目し，最も単純な数値計算法であるオイラー法によって数値解を求めました．その結果，計算の刻み幅を細かくすることでより精度良く数値解を求められることが分かりました．しかし刻み幅を細かくすると計算に時間がかかってしまいます．

今回は1つの微分方程式をオイラー法，ホイン法，中点法，古典的ルンゲ・クッタ法という4つの数値計算アルゴリズム（**図1**）で解き，同じ刻み幅で，どの方法がどれぐらい精度良く計算できるか比較検討します．

扱う微分方程式は人口増加モデル

扱う微分方程式は，ある時刻tでの人口を$x(t)$，人口の増加率をAとした，次の人口増加モデルとします．

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \cdots\cdots (1)$$

1カップルが4人の子供を産むとしても（少子化の日本には夢のような数字ですね），せいぜい30年で倍増というところでしょうか．その増加率を制御するのがパラメータAです．tを年の単位でとれば$A = 1/30$となります．式（1）を見ると1回微分して元に戻る関数が解になりますので，解析解（理論的・代数的に導出された厳密に正しい解）は次のように書けます．

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)} \cdots\cdots (2)$$

ただし，x_0は$t = t_0$におけるxの値，つまり初期値

この式を可視化しましょう．まず**リスト1**のようにライブラリ一式をインポートします．次に簡単のために$t_0 = 0$，$x_0 = 1.0$，$A = 1.0$として**リスト2**を実行すると**図2**が得られます．初期値は$x_0 = 1.0$であったものが，$t = 10$付近では10,000を超えるほど急激に増加していきます．いわゆる人口爆発の状況を示しています．

このモデルは誰も死ぬことなく，食料が尽きることもなく，産んだ数だけ単調に人口が増えていくという現実離れした状況を表していますが，数学的な取り扱いが容易なので数値計算のベンチマークとして採用することにします．数値計算用に微分方程式［式（1）］の右辺をPython上の関数として定義しておきます（**リスト3**）．

精度アップできる数値計算法を探す

● オイラー法（前回の復習）

オイラー法は微分方程式を数値的に計算する最も基本的なアルゴリズムです．オイラー法は**図3**の要領で曲線を追従していきます．図中のiをプログラム・カウンタとして，微分方程式の中で与えられる傾き$(dx(t))/dt$の情報を使いながら次々と継ぎ足して解を構成するというアルゴリズムです．数式で表せば以下のようになります．

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(x_i,\ t_i) \cdots\cdots (3)$$

精度に直接影響するのが刻み幅と呼ばれるhです．hが小さければ小さいほど傾き$(dx(t))/dt$が一定とみなせるので高精度になります．

オイラー法の実装，微分方程式（人口増加モデル）の数値計算，数値計算結果の可視化のためのプログラムをそれぞれ**リスト4**～**リスト6**に示します．得られ

プログラムは本誌サポート・ページから入手できます．
https://interface.cqpub.co.jp/2301py/