プロローグ2　自己位置推定/センサ・データの分析/画像圧縮を例に

イメージをつかんで学ぶ…線形代数の使い方

葛谷 直規

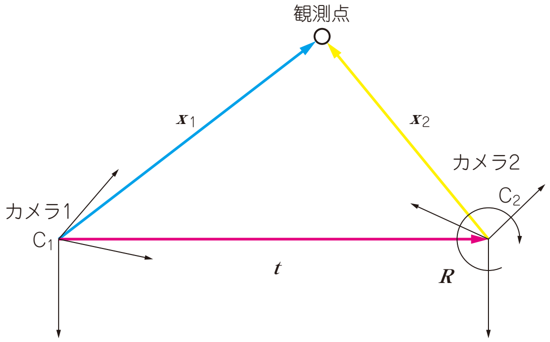

図1　単眼SLAMの場合のカメラと観測点の位置関係

プロローグ1では，エンジニアとしての数学を学ぶ必要性について述べました．では，具体的にどのように線形代数を使えばよいのでしょうか．ここでは，3つの代表的な使い方の例を紹介して，イメージをつかんでいただければと思います．

事例1　3次元幾何学と単眼SLAM

近年，多くのスマートフォンには，カメラを使って周囲の3次元情報とその中での自分(カメラ)の位置・姿勢を特定できる単眼SLAM(Simultaneous Localization And Mapping)という技術が搭載されています．それを使って，例えば画面の中の空間(机の上など)に仮想的にフィギュアを置くといったAR(Augmented Reality)を実現しています．

● 単眼SLAMの原理

最も基本的な原理は，撮影シーン中の同じ点を別の場所から2回撮影し，それぞれのカメラのどこにその点が写ったかを見比べることにより，カメラの移動量と姿勢角の変化量を割り出し，その情報を利用してシーンの3次元情報を得るというものです．そのためにカメラ撮影を数学的にモデリングして，幾何学的に問題を解いていきます．

● 位置関係をつかむ

カメラを，レンズの中心に原点を置く座標系であるとみなし，ある時点のカメラと別の時点(別の場所)のカメラが同じ点を観測している状況を考えます．その様子を，**図1**に示します．カメラ1(C_1)で観測した点の方向をベクトル$\boldsymbol{x}_1$，カメラ2(C_2)で観測した点の方向をベクトル$\boldsymbol{x}_2$，カメラ1から見たカメラ2の位置を並進ベクトル$\boldsymbol{t}$とし，座標系C_2上のベクトルを座標系C_1に変換する回転行列を$\boldsymbol{R}$とします．このときに，$\boldsymbol{t}$と$\boldsymbol{R}$を求めることがここで解こうとしている問題です．これを線形代数を用いて解いていくのですが，ここでは，そのさわりの部分について紹介します．

● 関係式

$\boldsymbol{x}_1$と$\boldsymbol{x}_2$と$\boldsymbol{t}$は三角形を構成しているので，同一平面上にあります．つまり，これらのうち2つのベクトルの外積をとれば，この平面に垂直なベクトル(法線ベクトル)を求めることができます．さらにその法線ベクトルと$\boldsymbol{x}_1$の内積をとれば，これらは直交するのでゼロになります．これを式で書くと次の通りです．

$$\boldsymbol{x_1}\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{x_2})=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，3次元ベクトル$\boldsymbol{t}=(t_x,\ t_y,\ t_z)$と$\boldsymbol{x}_2=(x_x,\ x_y,\ x_z)$の外積は，次の式で定義されます．

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix} t_y x_z - t_z x_y \\ t_z x_x - t_x x_z \\ t_x x_y - t_y x_x \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(2)$$

そして，この式は式(3)のように，行列とベクトルの掛け算で書き表すことができます．

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_x \\ x_y \\ x_z \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

このベクトル$\boldsymbol{t}$の要素からなる行列を$\boldsymbol{T}_\times$と置き，また，ベクトル$\boldsymbol{x}_2$はカメラ2の座標系C_2で表されているため，カメラ1座標系に変換するために回転行列$\boldsymbol{R}$を掛けると，次の式が得られます．

$$\boldsymbol{x_1}^{\mathrm{T}}T_\times\boldsymbol{R}\boldsymbol{x_2}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

そして，行列$\boldsymbol{T}_\times$と，行列$\boldsymbol{R}$を掛けたものを，基本行列$\boldsymbol{E}$と呼び，置き換えると次の式が得られます．

$$\boldsymbol{x_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x_2}=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

後は，未知の変数よりも多くの式があればこの方程式を解けるので，2つのカメラから共通に見える多数の点を集めれば$\boldsymbol{E}$について解くことができます(詳細