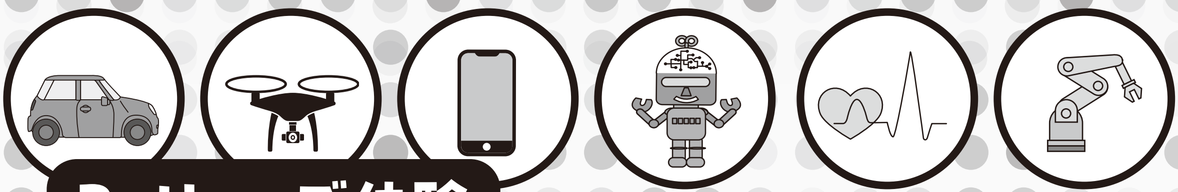

Pythonで体験 カルマン・フィルタ入門

ダウンロード・データあります

第4回 確率密度関数とベイズ定理の役どころ

廣川 類

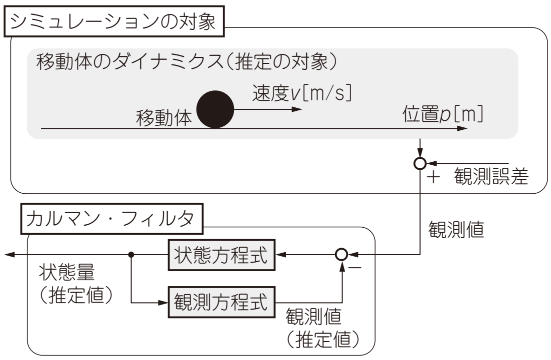

図1　カルマン・フィルタの使用例(移動体シミュレーション)

カルマン・フィルタは，移動体のダイナミクスや動きの不確定性，センサ誤差の確率モデルを考慮して，最適な推定を行う強力なセンシング技術です．

前回まで，点の1次元運動についてカルマン・フィルタで状態量(点の位置や速度)を推定する方法を解説しました(**図1**)．今回は，カルマン・フィルタ計算の数学的背景として，確率密度関数とベイズ定理の考え方について紹介します．

カルマン・フィルタの計算式

カルマン・フィルタの計算式の仕組みについて，数学的背景をふまえて説明します．なお，ここでは，数学的な厳密さは追求せず，ベイズ推定の考え方にもとづき，数値的な関係をJupyter Notebookで示しながら解説します．

● 基本の式

カルマン・フィルタの処理について簡単にまとめます(詳細は第1回～第3回参照)．カルマン・フィルタでは，推定の対象である状態量ベクトル$\boldsymbol{x}$の運動方程式を次の状態方程式(離散系)で表します．

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{q,\ k-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

式(1)の$\boldsymbol{\Phi}$はサンプル間の線形ダイナミクスを表す推移行列，$\boldsymbol{w}_q$は状態方程式自体の誤差を表すノイズ・ベクトルです．また，センサなどによる観測される観測量ベクトル$\boldsymbol{z}$を状態量ベクトル$\boldsymbol{x}$から得るモデルを次の観測方程式で表します．

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_{n,\ k} \quad \cdots\cdots (2)$$

式(2)の$\boldsymbol{H}$は状態量と観測量の関係(線形)を表す観測行列，$\boldsymbol{w}_n$は観測量に含まれる誤差を表すノイズ・ベクトルです．

● この式で何をやっているのか

カルマン・フィルタの処理は，状態方程式[式(1)]に基づくシステムで次ステップにおける状態量ベクトルの確率分布を予測する予測ステップ，観測方程式[式(2)]に基づく観測後の確率分布を予測する観測ステップからなります．それぞれの処理では，状態量ベクトル$\boldsymbol{x}$，および，状態量の誤差を表す誤差共分散行列$\boldsymbol{P}$が更新されます．

▶予測ステップ

予測ステップでは，状態量ベクトル$\boldsymbol{x}$および状態量の誤差を表す誤差共分散行列$\boldsymbol{P}$の次のステップにおける値を，次の式により求めます．

$$\boldsymbol{x}_k^- = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_{k-1}^+ \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \boldsymbol{P}_{k-1}^+ \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k-1} \quad \cdots\cdots (4)$$

$\boldsymbol{Q}$は運動方程式自体の誤差を表す誤差共分散行列です．上付きの－は(観測ステップ前の)事前事象，上付きの＋は(観測ステップ後の)事後事象を表します．

▶観測ステップ

観測ステップでは，観測量ベクトル$\boldsymbol{z}$を用いて，状態量ベクトル$\boldsymbol{x}$，および，誤差共分散行列$\boldsymbol{P}$の更新を，次のように行います．

$$\boldsymbol{x}_k^+ = \boldsymbol{x}_k^- + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k^-) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\boldsymbol{P}_k^+ = \boldsymbol{P}_k^- - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k^- \quad \cdots\cdots (6)$$

カルマン・ゲイン$\boldsymbol{K}$は，観測ノイズに関する誤差共分散行列$\boldsymbol{R}$を用いて次のように計算されます．

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1} \quad \cdots\cdots (7)$$

第1回　カルマン・フィルタの誕生と活躍する分野(2024年10月号)
第2回　カルマン・フィルタで1次元運動を推定①(2024年11月号)
第3回　カルマン・フィルタで1次元運動を推定②(2025年2月号)