

運動量保存則と 物体の衝突モデル

新井 正敏

第1章で台車の直線運動を扱いました。本章では少しレベルアップして、車両が正面衝突する現象について、モデル化から可視化まで行います。直線運動に加えて、衝突が加わることになるので、運動量保存則、エネルギー保存則を使ってモデル化していきます。

衝突のような状態が不連続に変化するモデルを構築する際には、ラッチやトリガといった状態切り替えの扱いに注意する必要があります。本章では、その考え方についても説明します。

衝突のモデル化①…条件設定と数式化

衝突に関する運動方程式を分かりやすく解釈し、それに基づいて微分方程式を導出します。

● 衝突の条件設定

ここでは、車Aが前方不注意により、赤信号で停車中の車Bに正面から追突する状況を扱います(図1)。物理現象の抽象化(単純化)を行い、計算に用いる条件は次の通りとします。

- 車Aの条件
 - 質量: m_A
 - 位置: $x_A(t)$, 初期位置: $x_A(0) < 0$
 - 速度: $v_A(t)$, 初速度: $0 < v_A(0)$
- 車Bの条件
 - 質量: m_B
 - 位置: $x_B(t)$, 初期位置: $x_B(0) = 0$
 - 速度: $v_B(t)$, 初速度: $v_B(0) = 0$
- 両者はx軸上を運動し、車Aが車Bに衝突する
- 衝突中には接触力 $F(t)$ が働く
- 反発係数は $e = 1.0$ (完全弾性衝突)

● 衝突の運動方程式 (運動量保存則)

衝突中に車Aが車Bに対して右向き(正方向)の力 $F(t)$ を加えると、車Aは左向き(負方向)の反作用 $-F(t)$ を受けます。

よって、各車両に対する運動方程式はニュートンの運動方程式から、次のように記述できます。

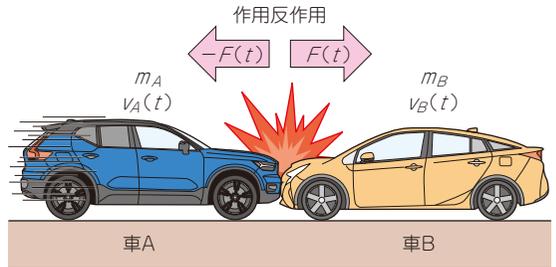


図1 車の衝突をモデル化する
車Aが車Bに対して右向き(正方向)の力 $F(t)$ を加えると、車Aは左向き(負方向)の反作用 $-F(t)$ を受ける

$$\begin{cases} m_A \ddot{x}_A(t) = -F(t) \\ m_B \ddot{x}_B(t) = +F(t) \end{cases}$$

ここで、 $x_A(t)$, $x_B(t)$ はそれぞれの位置関数です。これらの式は変形できて、

$$\begin{cases} m_A \frac{dv_A(t)}{dt} = -F(t) \\ m_B \frac{dv_B(t)}{dt} = +F(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A dv_A(t) = -F(t) dt \\ m_B dv_B(t) = +F(t) dt \end{cases}$$

となります。ここで、衝突直後の速度をそれぞれ、 $v_A(t + dt)$, $v_B(t + dt)$ とします。

$$\begin{cases} m_A (v_A(t + dt) - v_A(t)) = -F(t) dt \\ m_B (v_B(t + dt) - v_B(t)) = +F(t) dt \end{cases}$$

この2式を足し合わせると、

$$m_A (v_A(t + dt) - v_A(t)) + m_B (v_B(t + dt) - v_B(t)) = 0$$

すなわち、

$$m_A v_A(t + dt) + m_B v_B(t + dt) = m_A v_A(t) + m_B v_B(t) \dots\dots\dots (1)$$

となります。これは運動量保存則を意味しています。