

運動エネルギーと位置エネルギー

新井 正敏

力学において非常に重要な基本法則として、運動量保存則と力学的エネルギー保存則があります。

運動量保存則については、前章で示しました。本章では、力学的エネルギー保存則について詳しく扱います。この法則がどのような数学的背景をもって導かれるのかを明らかにするため、高校数学で学ぶ微分、積分を有効に用いて説明していきます。

まず、速度と距離の関係から議論を始め、時間を陽

に用いない運動の記述方法を整理します。併せて、物理現象を正しく扱う上で重要となる初期値の考え方についても示します。

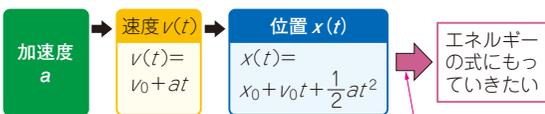
次に、直線運動における運動エネルギーと位置エネルギーを導出します。さらに、これらの考え方を回転運動へと拡張するため、極座標による運動の記述と運動方程式を紹介します。

4-1 速度と距離の関係… 力学的エネルギー保存則導出の準備

ここでは、力学的エネルギーの式（運動エネルギー、位置エネルギー）を導出する準備として、加速度、速度、距離の関係を復習します。

ここでの重要な目的は、図1のように時間 t を消去して、速度 v と位置 x の関係を直接得ることです。エネルギーは時刻そのものではなく、その瞬間の状態（位置や速度）で定まる量であるため、 v と x の関係式は、エネルギーの議論へ橋渡しをします。

以降、物体が一定加速度 a [m/s²]（時間に依存しない）で運動する場合を扱います。



目標：速度 v と位置 x の関係を求める

時間 t の消去が必要



図1 時間 t を消去することで速度 v と位置 x の関係を直接得る
エネルギーの式の導出には、 v と x の関係式が必要

それぞれの運動方程式

● 速度の運動方程式

初速度を v_0 とし、時刻 t における速度を $v(t)$ とします。加速度が一定 $a(t) = a$ のとき、

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a \, d\tau + v_0 \\ &= \left[a\tau \right]_0^t + v_0 \\ &= a t + v_0 \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

ここで τ は積分に用いる補助変数（ダミー変数）です。

● 位置の運動方程式

初期位置を x_0 とし、時刻 t の位置を $x(t)$ とします。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(\tau) \, d\tau + x_0 \\ &= \int_0^t (a\tau + v_0) \, d\tau + x_0 \\ &= \left[\frac{1}{2} a\tau^2 + v_0\tau \right]_0^t + x_0 \\ &= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$