第9章 散水車を題材にベルヌーイの定理を使ったらSimulinkモデルを構築する

ご購入はこちら

流体と力学のモデル化

新井 正敏

一般に，工業製品は1つの工学分野だけで成り立っているわけではありません．例えばドライヤは，電気工学だけでなく，熱力学，流体力学，さらには力学や機構学といった複数の工学分野が組み合わさって構成されています．

本章では，力学と流体力学を組み合わせた例として，水を噴射して走行する車を題材に取り上げ，その物理モデルを構築し，実際に動作させていきます．

基礎知識…エネルギー収支とベルヌーイの定理

ベルヌーイの定理（ベルヌーイの方程式）は，理想流体の定常流れ（流体がスムーズに，同じ流れ方でずっと流れている状態）において，流線上で単位体積当たりのエネルギーが保存されることを示しています．

図1に水色の球で示した流体素片（微小な流体要素）が管を流れることを元に，ベルヌーイの定理を説明します．ここで言う流体素片とは，水の分子1個ではなく，分子集団を平均化した微小な体積要素を指します．流体素片の内部では圧力P，密度ρ，速度vが平均量として一様とみなせます．

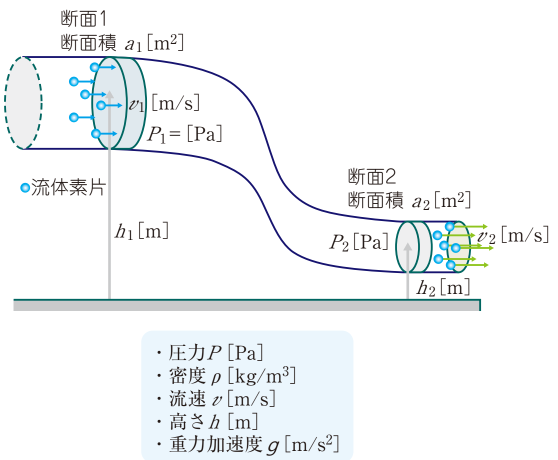

図1　流体素片（微小な流体要素）**が管を流れる様子**
これをもとにベルヌーイの定理を深掘りする

● 単位体積当たりのエネルギー収支

流体素片に対して，仕事-エネルギー原理を適用すると，外力（圧力，重力）による仕事と運動エネルギーの変化との釣り合いから，式（1）の単位体積当たりのエネルギー収支が得られます．

$$\underbrace{P}_{\text{圧力によるエネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\rho g h}_{\text{位置エネルギー}} = \text{一定} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

各項の次元は，

$[\mathrm{Pa}] = [\mathrm{N/m^2}] = [\mathrm{J/m^3}]$

であり，いずれも単位体積当たりのエネルギーを表しています．

● ベルヌーイの定理

式（1）の関係を**図1**の断面1（断面積a_1）と断面2（断面積a_2）に適用すると，

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{一定} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

が得られます．

従って，式（2）がベルヌーイの定理です．ここで，式（1）の各項目の単位について同一であることを確認していきます．

● 各項の物理的意味と単位展開

▶圧力の項（P）

圧力の定義（単位）から，圧力とエネルギーの関係を考えます．

圧力Pの単位は[N/m^2]なので，

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{m^3}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}$$

です．よってPの単位はJ/m^{3}と等価であり，単位体積あたりのエネルギーとしても理解できます．

▶運動エネルギーの項（$\frac{1}{2}\rho v^2$）

この項は，流体の運動エネルギーの密度を表します．質量密度（ρ [kg/m^3]）と速度（v [m/s]）を用いた