

新・組み込みソフトへの 数理的アプローチ

～形式仕様記述をどのように使うか～

第7回

組み合わせ問題と LTSA

——モデル検査ツールで組み合わせパターンを列挙する

藤倉 俊幸

はじめに

しばらく命題論理の話が続いたが、そろそろ論理以外の話題に移ってみよう。プログラムを作るのに論理以外に重要なものといえば、離散数学だろう。離散数学を構成するものは、グラフ理論や組み合わせ論などである。そして、それらの基礎として位相や写像が出てくる。

また、プログラムにはデータ構造などを問題とする静的な側面と、タスク設計などを問題とする動的な側面がある。モデル検査などは、動的な側面を扱う手法である。並行処理が当たり前の組み込みシステムでは、動的な側面が特に重要である。そこで今回は、かなり強引だがモデル検査ツールである LTSA (Labelled Transition System Analyzer) を使って組み合わせ問題を解いてみよう。

組み合わせの数を計算する公式はいろいろと知られているが、LTSA をうまく使用すると実際の組み合わせを生成することができる。モデル検査ツールがすべての場合を網羅的に検査できるのは、実際に組み合わせを生成できるからである。この特性を利用して LTSA で具体的な組み合わせを網羅的に生成してみよう。

LTSA を使うことによって具体的な組み合わせを得られれば、テスト・ケースを作ったり、設計時にどのような場合を考慮すべきかの指針を得たりすることができる。また、LTSA で使う FSP 式⁽¹⁾で表現したモデルがどのような動きを含んでいるのかを知るサンプルとしても組み合わせ問題は適していると思う。FSP 式は LISA で使われている動作を表す式である。

まずはじめに、組み合わせ問題の復習をして、それから FSP 式化する。そして、最後に気分を変えて写像の話をしてみたい。写像を使うと組み合わせ問題の構造が少し見えてくると同時に、写像についての理解も深まる。



1 順列と組み合わせ

● 組み合わせの ${}_n P_k$, ${}_n C_k$ …学校のおさらいから

組み合わせ問題で基本になるのは、順列と組み合わせである。といっても、細かいことは忘れてしまっているの、昔学校でやったことを整理しておく。

n 個の異なるものを、順序を考慮して並べる仕方を順列 (Permutation) という。そのような並べ方の総数は、 $n!$ になる。 $n!$ は“エヌの階乗”と読む。1 から n までを順に掛けた数字を表している。急に大きな数になるので感嘆符で表す。

n 個の異なるものの中から、 k 個を取って並べる順列の総数は、

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \cdots \cdots (1)$$

になる。ただし、 $n \geq k$ とする。 ${}_n P_k$ と書かれることもある。選ぶだけで並べない場合には、組み合わせ (Combination) という。つまり、順番を気にしない場合である。 n 個の異なるものの中から k 個を選ぶ選び方の総数は、

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdots \cdots (2)$$

になる。これは、 ${}_n C_k$ とも書かれ、2 項係数 (Binomial Coefficient) とも呼ばれる。 n 種類があり、第 1 の種類のものが d_1 個、第 2 の種類のものが d_2 個、 \cdots 、合わせて $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 個ある場合に、この m 個のものを並べる並べ方は重複順列 (Permutation with Repetition) といい、総数は、

$$\left(\frac{m}{d_1, d_2, \cdots, d_n} \right) = \frac{m!}{d_1! d_2! \cdots d_n!} \cdots \cdots (3)$$

となる。 n 種類のものが各種類ごとに十分な数だけあり、それらから r 個選んで並べる場合、すなわち n 種類のものから r 個選ぶ重複順列の総数は、

$$n^r \cdots \cdots (4)$$