新・組み込みソフトへの数理的アプローチ

～形式仕様記述をどのように使うか～

第8回 組み合わせ問題で写像に親しむ
――仕様記述で写像を使いこなす準備

藤倉 俊幸

写像を使うと，組み合わせ問題の構造が見えてくると同時に写像についての理解も深まる．ということで，前回（2009年8月号，pp.170-176）の最後で写像と組み合わせ問題との対応について説明した．今回は，ここを掘り下げ，仕様記述で写像を使いこなす準備をしてみる．

1 写像について

前回と重複するが，基本的な定義を振り返ってみる．二つの集合 X と Y で，X の各要素に対してただ一つの Y の要素が対応するような規則 f のことを X から Y への写像と呼ぶ．X を定義域あるいはドメインと呼び，Y を余領域もしくはコドメインなどと呼ぶ．X と Y は，以下のような表現をする．

$y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y$

$X \xrightarrow{f} Y$

$f : X \to Y$

全射（surjection），単射（injection），全単射（bijection）という用語を用い，

f が X と Y の1対1対応のときは全単射

$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ であるときは単射

Y の要素すべてに対応が付いているときは全射

となる．$f(x)$ の集まりを値域と呼ぶ場合と，Y を値域と呼んで，$f(x)$ を f の像とかイメージと呼ぶ場合がある．

慎重に読まないと，$f(x)$ の集まりを値域と呼んで Y のことも値域と呼ぶように理解してしまい，全射を改めて定義する意味が理解できなくなる．数学の本は，注意深く読まないと混乱する．本によって定義が少しずつ異なることもあるので，何冊かを同時に読むときも注意が必要である．

全単射の場合には，逆写像 f^{-1} が存在する．また，要素の数が有限の集合 S を有限集合と呼ぶ．$|S|$ で S の要素数を表す．この数を基数（cardinal number）と呼ぶが，UMLのクラス図に出てくる多重度（multiplicity）は基数（cardinality）の取り得る範囲である．

$f(x)=x^2$ を考えてみよう（**図1**）．$X=(-\infty,\ \infty)$ を定義域，$Y=(-\infty,\ \infty)$ を余領域とすると，f は Y のマイナス側に対応する $f(x)$ が存在しないので全射ではない．$Y=[0,\ \infty)$ とすれば全射になる．さらに，$X=[0,\ \infty)$ とすれば全単射になる．この区間であれば $g(x)=\sqrt{x}$ を $f(x)$ の逆写像とすることができる．区間を表すとき［ ］は境界を含み，（ ）のときは境界を含まないとする．

X と Y を有限集合とすると，写像 $f : X \to Y$ が全射なら $|X| \geqq |Y|$，単射なら $|X| \leqq |Y|$，全単射なら $|X| = |Y|$ となる．ものの数を数えるというのは，自然数の集合と数えるものの集合との間に全単射を定義することである（**図2**）．一つ，二つと数えることが対応付けである．正しく数えるためには，漏れや重複がないようにしなければならない．

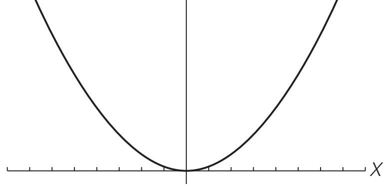

図1
x^2 のグラフ

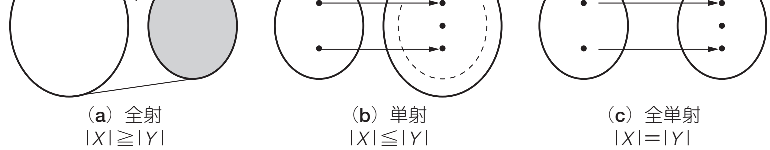

図2 写像と集合の大きさ

KEYWORD――組み合わせ問題，写像，VDM