# やり直しのための伝送数学

三谷 政昭

連載第24回の今回からは，高性能なエラー訂正技術として確率的復号法を取り上げる．本復号法の概説から始め，確率をどのようにエラー訂正処理に反映させていくのかを中心に，まずは一例として畳み込み符号の生成や表現方法について具体例とともに解説して基礎を固める．（編集部）

## 第24回　OFDMシステムの受信性能向上技術（その4）　確率的復号法と畳み込み符号の基礎

前回（2011年12月号，pp.184-193）は，OFDMシステムで多用される“連続したビット・エラー（バースト・エラー）の訂正を可能にするRS（リード・ソロモン）符号”を取り上げて解説した．

近年，移動体通信やディジタル放送などの幅広い応用分野で利用されるビタビ復号，ターボ符号，LDPC（Low-Density Parity Check，低密度パリティ検査）符号が，高性能なエラー訂正技術として注目を浴びている．

これらの符号は“確率的復号法”と呼ばれる手法を最大限に活用するものであり，今回は確率的復号法の土台となる“畳み込み符号”にフォーカスして，基礎概念や符号表現方法（遅延演算子による関数表現，ツリー表現，トレリス表現）などを説明する．数回にわたり解説予定の確率的復号法を理解する上で，必要不可欠な知識となるものだから，じっくりと読み進めていただきたい．

### 1．確率的復号法とは

前回解説したRS符号は，群論（主に剰余計算）と呼ぶ代数学に基づいて構成されるブロック符号の代表格として，エラー訂正能力に優れた非常に効率性の高い符号であり，広く実用に供されている．同種のブロック符号にはハミング符号やBCH符号などが知られるが，いずれも「できるだけ計算効率が良く復号も簡単な符号を代数的に構成しよう」という流れに端を発する符号構成法である．

これに対して，符号構成法のもう一つの大きな流れ，考え方がある．まずは高いエラー訂正能力を有する復号法を考え，それに適した符号構成法を開発しようという流れである．この流れを代表する復号法として，ビタビ復号による処理（畳み込み符号）とMAP（Maximum Aposteriori Probability，最大事後確率）復号に基づく繰り返し処理（ターボ符号，LDPC符号）があり，**確率的復号法**と呼ばれる．これらの復号法に最適化する形で，非常に高性能な符号が提案され，エラー訂正能力の高いことが知られている．

特に，繰り返し復号に適した構造を持つ符号長が長い符号を構成することにより，復号するときの計算量を現実的な範囲に抑えて通信路符号化定理（シャノンの限界，第22回，2011年10月号，pp.152-159を参照）で示される限界に極めて近い特性を有する符号が得られるのである．つまり，

情報伝送速度を$R$［ビット/単位時間］で表せば，伝送容量$C$（$R$の最大値に相当）の通信路が与えられたとき，$R<C$であれば，任意の正数$\varepsilon$に対し，復号エラー率$P_\varepsilon$が，

$$P_\varepsilon < \varepsilon \quad \cdots\cdots (1)$$

となるような符号構成法が常に存在するというわけだ．このシャノンの限界に極めて近い理想的な確率的復号法に適したものとして，畳み込み符号，ターボ符号，LDPC符号が代表的である．

いま，情報源から送信する$M$個の通報の集合$X$が$\{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$であり，各通報が送られる確率がそれぞれ$\{p(a_1), p(a_2), \cdots p(a_M)\}$であるとする．一方，受信する$N$個の通報の集合$Y$を$\{b_1, b_2, \cdots, b_N\}$とすると，通報$a_m$が送信されたときに受信された通報が$b_n$である条件付き確率$p(b_n|a_m)$が計算できて，

$$\sum_{n=1}^{N} p(b_n \mid a_m) = 1\ ;\ m = 1, 2 \cdots, M \quad \cdots\cdots (2)$$

となる関係を有する．

例えば，ある通報$x=a_m$を送ったとき，通報$y=b_n$が復号受信される確率$p(b_n|a_m)$に基づき，正しく送信通報$x=a_m$が復号された確率$P_C(a_m)$（**正復号率**と呼ぶことにする）は，

$$P_C(a_m) = p(b_n \mid a_m)\, p(a_m) \quad \cdots\cdots (3)$$