やり直しのための

伝送数学

最終回

三谷 政昭

連載最終回となる今回は，LDPC符号の生成（符号化），および事後確率を繰り返し計算で精密化する積和アルゴリズムを用いたLDPC符号の復号プロセスについて，具体的数値例とともにわかりやすく説明します．（編集部）

第29回 OFDMシステムの受信性能向上技術（その9） LDPC符号の生成と積和アルゴリズムによる繰り返し復号

前回（2012年9月号，pp.156-162）は，シャノン限界に近づく符号として，近年とみに注目されるLDPC符号を取り上げて，基礎的なパリティ検査が基本であることを中心に，LDPC符号の概要について説明した．

今回は，まずLDPC符号の生成（符号化）について説明する．次に，再帰原理に基づくLDPC符号の復号法として，積和アルゴリズムに基づく事後確率の繰り返し計算によって誤り訂正を実現する基本的な考え方を解説する．

1. LDPC符号の生成

LDPC符号は，パリティ検査行列Hの各列に含まれる‘1’の個数が，小さな一定数以下となる符号である．符号長は数千以上であるが，検査行列Hに含まれる‘1’の個数が少なく，スパース行列（疎行列）になっている．その際，誤り検出/訂正は，‘1’のある要素だけで行えばよいため，非常に少ない計算量で実行できる．

いま，LDPC符号のパリティ検査行列Hが5行10列の行列（$M=5$，$N=10$）として，

$$H=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

で表される場合を例に，LDPC符号の生成を考えてみよう．ここで，符号語$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10})$は，偶数パリティ条件［$H\boldsymbol{x}^T=\boldsymbol{0}$，$T$は転置を表す］として，

$$\begin{cases} x_1\oplus x_6\oplus x_7=0 & \cdots\cdots (2)\\ x_2\oplus x_7\oplus x_8=0 & \cdots\cdots (3)\\ x_3\oplus x_8\oplus x_9=0 & \cdots\cdots (4)\\ x_4\oplus x_9\oplus x_{10}=0 & \cdots\cdots (5)\\ x_1\oplus x_5\oplus x_{10}=0 & \cdots\cdots (6) \end{cases}$$

を満たすことは明らかである．ここで，$\oplus$で表す記号は排他的論理和（mod 2演算）を表す．

しかるに，LDPC符号を生成するには，（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）に情報を割り当てて，式（2）～式（6）の関係式から，x_{10}，x_9，x_8，x_7，x_6の順に冗長なビットを決定すればよい．例えば，（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）=（1，0，1，1，1）のとき，

$$\begin{cases} x_{10}=x_1\oplus x_5=1\oplus 1=0 & [\text{式(6)より}]\\ x_9=x_4\oplus x_{10}=1\oplus 0=1 & [\text{式(5)より}]\\ x_8=x_3\oplus x_9=1\oplus 1=0 & [\text{式(4)より}]\\ x_7=x_2\oplus x_8=0\oplus 0=0 & [\text{式(3)より}]\\ x_6=x_1\oplus x_7=1\oplus 0=1 & [\text{式(2)より}] \end{cases}$$

となって，

$$\boldsymbol{x}=(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

のLDPC符号が生成される．

2. 積和アルゴリズム（sum-product計算）によるLDPC符号の復号法

今度は，受信した信号系列$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N)$から送信データ$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$を推定する計算法として，再帰原理に基づく繰り返し復号の代表的な積和アルゴリズムを説明しよう．

この復号法は，繰り返し計算によって各受信信号$\{y_n\}_{n=1}^{n=N}$に対する事後確率をより精密に算出し，送信データ$\{x_n\}_{n=1}^{n=N}$を可能な限り正しく推定しようとするものであり，経験的に積和アルゴリズムに基づく復号法が優れた訂正能力を有することが知られている．なお，通信路としては，ある$0<\varepsilon<0.5$に対して，

KEYWORD ── LDPC符号，パリティ検査行列，積和アルゴリズム，繰り返し復号，事後確率